

Marek Pisarski

Samodzielne wykonywanie pomocy dydaktycznych jako element nauki myślenia matematycznego

- ✓ Środki dydaktyczne do kształtowania pojęcia liczby i działań matematycznych
- ✓ Dziecięca geometria
- ✓ Pomoce dydaktyczne



Analiza merytoryczna
Elżbieta Miterka

Recenzja
Jolanta Lazar

Redakcja językowa i korekta
Anna Wawryszuk

Projekt graficzny, projekt okładki
Wojciech Romerowicz, ORE

Skład i redakcja techniczna
Grzegorz Dębiński

Projekt motywu graficznego „Szkoły ćwiczeń”
Aneta Witecka

ISBN 978-83-65967-00-8 (Zestawy materiałów dla nauczycieli szkół ćwiczeń – matematyka)

ISBN 978-83-65967-06-0 (Zestaw 2. Środki dydaktyczne w przedszkolnej i wczesnoszkolnej edukacji matematycznej)

ISBN 978-83-65967-07-7 (Zeszyt 1. Samodzielne przygotowywanie pomocy dydaktycznych jako element nauki myślenia matematycznego)

Warszawa 2017
Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
www.ore.edu.pl

Publikacja jest rozpowszechniana na zasadach wolnej licencji Creative Commons – Użycie niekomercyjne 3.0 Polska (CC-BY-NC).

Spis treści

Wstęp	4
Dlaczego niektóre pomoce dydaktyczne warto wykonywać samodzielnie?	5
Dziecięce liczenie. Środki dydaktyczne do kształtowania pojęcia liczby i działań matematycznych	7
Dziurawe karteczki i liczmany	9
Chodniczek liczbowy – kropki	12
Kierunek 1. Chodniczek do 20 – liczby	13
Kierunek 2. Karty do przeliczania – kropki	16
Jeszcze trochę kropek. Domino, czyli pojawia się zero	19
Liczby na dywaniku (edukacja wczesnoszkolna)	22
Dywanik liczbowy do 100 (edukacja wczesnoszkolna)	25
Dodaj lub odejmij	28
Liczydła pozycyjne	29
Liczydło dziesiętkowe	29
Liczydło czwórkowe (edukacja wczesnoszkolna, klasa III)	33
Zestawy pomocy do nauki mnożenia	34
Mnożenie do stu	35
Dziecięca geometria	38
Origami	41
Kołowa układanka	42
Ważymy i porównujemy	44



Porównywanie ciężarów	44
Dlaczego warto razem z dziećmi skonstruować linijkę?	46
Pomoce dydaktyczne do dziecięcej klasyfikacji	49
Dowiedz się więcej	51
Bibliografia	51
Spis tabel	51



Wstęp

Aby uczyć się w sposób zorganizowany i systematyczny, każdy człowiek potrzebuje odpowiednio zorganizowanego środowiska. Szkoła to miejsce, gdzie umysły uczniów są nieustannie stymulowane do nauki, zachęcane do myślenia, rozwoju emocjonalnego i społecznego. Przypomnijmy, że uczenie się matematyki na każdym poziomie polega na samodzielnym pokonywaniu trudności w zadaniach, w których należy operować pojęciami matematycznymi. Pojęcia te mogą mieć różne reprezentacje (Bruner, 1978), należy je tak dobierać, aby uczeń na swoim etapie rozwoju mógł z nich korzystać, pokonując trudności zadania. Na początkowych etapach edukacyjnych znaczącą rolę odgrywają konkretne przedmioty i czynności wykonywanie z ich pomocą (przemieszczanie, układanie, sortowanie, zniekształcanie).

Pamiętamy także o tym, że uczniowie osiągający pożądane cele edukacyjne powinni być nagradzani. Należy zatem stworzyć im miejsca, w których będą mogli spędzać czas, oddając się zabawie, a przez to dokonywać eksploracji otaczającej rzeczywistości i rozwijać procesy poznawcze. Nie ulega więc wątpliwości, że z tego powodu przestrzeń edukacyjną szkół trzeba odpowiednio zorganizować, czyli tak, aby proces edukacyjny przebiegał sprawnie i prawidłowo. Przykładowo, czas potrzebny na przygotowanie pomocy dydaktycznych do użytku nie powinien być zbyt długi ani pokusa nagród za wysiłek niezakończony w przewidzianym czasie odpowiednim rezultatem zbyt silna.

Oczywistą prawdą jest, że nauczyciel edukacji wczesnoszkolnej to człowiek dojrzały i ukształtowany w wieloletnim procesie edukacyjnym, a jej podopieczni są ludźmi na jednym z początkowych etapów rozwoju emocjonalnego, intelektualnego i społecznego. Wynika z tego, że nawiązanie relacji sprzyjających uczeniu się i nauczaniu wymaga konkretnych, materialnych środków ułatwiających komunikację, pośredniczących niejako między dorosłym a dzieckiem. Środki te nie są li tylko urozmaicheniem procesu dydaktycznego – to ważna pomoc w uczeniu się, bez której proces ten będzie zaburzony, co w wielu przypadkach może prowadzić do trudnych do naprawienia skutków¹. Pomagają wypracować z uczniem właściwy język; język oparty na konkretnych czynnościach, pozwalający porozumiewać się w sposób zrozumiały dla obu stron. Uczeń nie musi opisywać tego, co robi, a nauczyciel nie musi odwoływać się do wyobrażonych przedmiotów – może natomiast pokazać dziecku, co trzeba wykonać, oraz zauważyć, kiedy uczeń wykonał to, co należało zrobić.

W tym zestawie opiszemy najważniejsze elementy materialnej obudowy procesu dydaktycznego, zarówno pojedyncze środki dydaktyczne, jak i większe przestrzenie edukacyjne w edukacji matematycznej na poziomie przedszkola i klas I–III. Przedstawimy sposoby wykorzystania gier analogowych i technologii. Zeszyt 4, mimo że najkrótszy, wydaje się szczególnie istotny. Za pomocą przestrzeni edukacyjnej, którą organizujemy uczniom w klasie szkolnej, wyrażamy bowiem nie tylko nasz stosunek do tego, czym jest edukacja w ogóle (a edukacja matematyczna w szczególności), ale także w sposób bezpośredni

¹ Autor ma tu na myśli skutki zbyt formalnego przekazywania treści kształcenia, uczenie na pamięć lub stosowanie znaków matematycznych bez zrozumienia ich znaczenia.



i bardzo silny wpływamy na kierunek rozwoju uczniów i jego efekty. Czy chcemy, by myśleli samodzielnie, twórczo i krytycznie, czy w większym stopniu mają być nośnikami wiedzy i umiejętności i tylko odtwarzać wiedzę utrwaloną w gotowej postaci? Na ile nasi uczniowie staną się samodzielnymi, gotowymi do podejmowania się trudnych zadań i chętnie współpracującymi osobami, a na ile wykonawcami zadań zleconych im przez przełożonych?

Dlaczego niektóre pomoce dydaktyczne warto wykonywać samodzielnie?

Współczesne społeczeństwo stawia przed obywatelami coraz to nowe zadania i wyzwania. Aby dobrze sobie z nimi radzić, od najwcześniejszych etapów życia dziecko jest wdrażane do przyjmowania tych wyzwań i odpowiadania na nie w sposób adekwatny, często wymagający samodzielnego opracowywania podejść i strategii. Jeśli rozwój dzieci przebiega prawidłowo i jest odpowiednio wspomagany, wchodzą one w dorosłe życie bez frustracji i nadmiernych trudności, bez agresji i poczucia, że się nie uda.

Wspomaganie rozwoju intelektualnego i emocjonalnego, a także psycho-motorycznego dziecka odbywa się przez eksperymenty i zabawy, w tym konstrukcyjne, z użyciem prostych przedmiotów codziennego użytku lub dostosowanych do możliwości manualnych dzieci ich odpowiedników – zabawek. Często także specjalnie przygotowanych i do tego celu przeznaczonych przedmiotów. Dziecko przechodzące z etapu edukacji przedszkolnej do etapu wczesnoszkolnego powinno już w miarę sprawnie posługiwać się różnorodnymi materiałami, z których wznosi się konstrukcje lub tworzy kompozycje. Powinno też odróżniać dobrze wykonane zadania od błędnych oraz odczuwać radość, gdy uda się pokonać trudności, albo potrzebę wykonania zadania lepiej.

Od każdego dziecka wchodzącego na etap edukacji wczesnoszkolnej niezmiennie oczekujemy także umiejętności przeliczania niewielkich zbiorów obiektów i odróżniania poprawnego przeliczania od niepoprawnego, a także wykonywania prostych działań arytmetycznych (dodawanie, odejmowanie) za pomocą konkretnych przedmiotów lub palców. Będzie dobrze przygotowane do kontynuowania nauki w klasie I, jeśli nabędzie umiejętność ustalania równoliczności dwóch zbiorów i będzie umiało posłużyć się liczebnikami porządkowymi. Niezbędne jest także rozróżnianie strony lewej i prawej, określanie kierunków i ustalanie położenia obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów. W klasach I–III przyda mu się także umiejętność wykonywania prostych pomiarów długości, np. krokami lub stopami. Pożądane są umiejętności określania dni tygodnia, miesięcy, pór roku oraz porządku następowania.

Do każdego z tych celów, potrzebnych z punktu widzenia rozwoju intelektualnego i emocjonalnego, przypisane są konkretne pomoce dydaktyczne wspomagające ich realizację. Pomoce te powinny być w ciągłym użyciu, wiele z nich ulega zniszczeniu, a zatem nie mogą być to przedmioty ani zbyt drogie, ani trudno dostępne. Najlepiej, aby były to przedmioty przygotowane i sporządzone przez samych nauczycieli lub wspólnie z dziećmi. Uczniowie mogą wycinać różne kształty z papieru, wkładać wycięte kawałki w koperty, zbierać kasztany



i żółędzie. W edukacji wczesnoszkolnej cele edukacji matematycznej rozbudowują się o dodatkowe elementy w porównaniu z edukacją przedszkolną, jednak znaczenie prostych i łatwych do wykonania pomocy dydaktycznych nie zmniejsza się, a wręcz rośnie.

W nowej podstawie programowej z roku 2017 czytamy:

„Do zadań szkoły w zakresie edukacji wczesnoszkolnej należy:

1) wspieranie wielokierunkowej aktywności dziecka przez organizowanie sytuacji edukacyjnych umożliwiających eksperymentowanie i nabywanie doświadczeń oraz poznawanie polisensoryczne, stymulujących jego rozwój we wszystkich obszarach: fizycznym, emocjonalnym, społecznym i poznawczym;” (Rozporządzenie..., 2017: 16).

Także lektura szczegółowych wymagań skłania do wniosku, że nie sposób osiągnąć zamierzonych efektów, nie posługując się pomocami dydaktycznymi, stanowiącymi integralną część środowiska edukacyjnego i służącymi nie tylko urozmaiceniu lekcji, ale też stanowiącymi ich nieodłączną część składową.

Edukacja matematyczna jest w edukacji przedszkolnej i wczesnoszkolnej częścią edukacji zintegrowanej. Na zajęciach o wiodącym wątku matematycznym dzieci uczą się także używać poprawnie języka polskiego, wykorzystują umiejętności kształtowane podczas zajęć edukacji muzycznej i plastycznej. Właśnie te ostatnie można w dużej mierze przeznaczyć na zadania dotyczące poruszanego tematu: **uczniowie mogą przygotowywać i tworzyć środki dydaktyczne potrzebne do zajęć matematycznych, w szczególności do rozwiązywania zadań, do gier albo do klasyfikowania lub tworzenia regularnych, rytmicznych, kompozycji.**

Zaletą tego rodzaju pomocy w kształceniu są: łatwość w przygotowaniu oraz niski koszt, a zatem można je odtwarzać do kolejnych zajęć bez żalu, że podczas poprzednich uległy zniszczeniu. Dodatkowo, skoro tworzenie lub współtworzenie razem z nauczycielem w szkole (lub z rodzicami w domu) środków dydaktycznych stanowi część procesu edukacyjnego, ich budowanie możemy traktować jako pożyteczną naukę. Przez konstrukcję pomocy dzieci zapoznają się z ich prostą budową i sposobem posługiwania się nimi. Bardzo często samodzielnie wykonana pomoc dydaktyczna będzie też bardziej szanowana przez ucznia, który pamięta, ile pracy wymagało jej wytworzenia. Oczywiście niektóre wspólnie wykonywane pomoce (te najbardziej pracochłonne) warto też zabezpieczać przed zniszczeniem, zachowywać po zajęciach i używać wielokrotnie, np. karty z obrazkami, służące do klasyfikacji lub budowania opowiadań warto zafoliować.

Wiele z tak wykonanych środków dydaktycznych stanowi cenny element wystroju pomieszczeń edukacyjnych. Przyciągają wzrok uczniów oraz utrwalają w pamięci temat zajęć z ich udziałem, a także związane z nimi osiągnięcia.

W tym zeszycie opiszemy zestawy prostych do wykonania lub przygotowania pomocy dydaktycznych wraz z opisami przykładowych sytuacji dydaktycznych, w których mogą być użyte. Do ich wykonania będziemy używać papieru (w tym gazet reklamowych), ogólnie



dostępnych narzędzi, tj. nożyce, młotek itp., oraz różnych tanich przedmiotów, które każdy ma w domu (wieszak), a także kleju, farb i przyborów do pisania.

Przygotowując pomoce dydaktyczne do zajęć edukacji matematycznej, w sposób naturalny daje się wyodrębnić dwa zestawy pomocy. Pierwszy – przechowywany w jednym miejscu i przeznaczony do użytku dla wszystkich na wybranych zajęciach. Drugi – zestaw środków dydaktycznych podręcznych, stanowiących wyłączną własność ucznia, z których może on korzystać wtedy, gdy ma potrzebę po nie sięgnąć. Takie osobiste zestawy powinny mieć swoją nazwę, np. pudełko skarbów, skrzynka pirata, szkatułka z drobiazgami itp. Z pewnością znajdą się w niej woreczki z drobnymi przedmiotami do przeliczania, pionki i kostka do gry, liczydełko różnego rodzaju i centymetr krawiecki (chodniczek liczbowy i przyrząd do mierzenia).

Dziecięce liczenie. Środki dydaktyczne do kształtowania pojęcia liczby i działań matematycznych

W wielu przedszkolach i szkołach podczas nauki rachunków nauczyciele i uczniowie dysponują niewielkim zestawem pomocy potrzebnych do szybkiego i poprawnego wykonywania działań matematycznych. Można tam spotkać duże liczydła z koralikami przesuwanymi wzdłuż prętów, z których korzystać może jednocześnie tylko kilku uczniów. Wielu z nich zamiast konkretnych przedmiotów do przeliczania używa palców. Często zbyt szybko rezygnuje się z tych nielicznych prostych pomocy, jakimi są liczydła i liczmany (patyczki) albo inne drobne przedmioty ułatwiające rozwiązywanie zadania rachunkowego lub tekstowego.

Takie traktowanie konkretnych pomocy rachunkowych i wymaganie, aby dziecko wykonywało działania wyłącznie w pamięci lub na papierze nie jest prawidłowe z punktu widzenia jego potrzeb rozwojowych. Ograniczanie dostępu do tych pomocy i zastępowanie ich zapisami symbolicznymi jest jedną z głównych przyczyn uczniowskich niepowodzeń. Zwłaszcza przyśpieszanie formalnego redagowania ćwiczeń rachunkowych, zanim dziecko opanuje je bez tej wątpliwej „pomocy”, jaką mają stanowić znaki matematyczne, jest postępowaniem niewłaściwym, idącym w złą stronę. Zapis, który dla dorosłego jest czytelny i wspomagający, dla ucznia klasy I, a często też II i III jest najeżony licznymi trudnościami, niezwiązanymi z rachowaniem. Musi on zidentyfikować symbole działań i cyfry, znak relacji równości, pokonać trudności związane z czytelnym zapisem tych znaków w określonej kolejności i jeszcze wykonać poprawnie zapisane działania. Cele związane z zapisywaniem symboli matematycznych i pełnych formuł z ich użyciem są oczywiście ważnymi celami i należy je realizować. Jednak na wczesnych etapach edukacji powinno się je traktować niejako osobno w stosunku do samych operacji umysłowych, które się pod nimi kryją, a zatem pisanie formuł matematycznych traktować należy tak, jakby to były zajęcia poświęcone matematycznej kaligrafii.



Podczas rozwiązywania zadań matematycznych mały uczeń powinien korzystać z różnego rodzaju dostępnych mu pomocy i to tak długo, jak tylko mu są potrzebne. Dotyczy to nie tylko rachowania. Należy także zachęcać uczniów do przedstawiania sytuacji opisanych w zadaniach i do poszukiwania ich rozwiązań za pomocą konkretnych czynności, a także do stosowania przy tym rozmaitych podręcznych przedmiotów lub gotowych rysunkowych schematów. To bardzo ułatwia zrozumienie zadania, a często podsuwa pomysł na jego rozwiązanie. Po pewnym czasie dziecko samo zrezygnuje z tych „konkretnych” ułatwień lub przeniesie je niejako do wyobraźni, czym wzbogaca swój arsenał pomocy służących rozwiązywaniu problemów. Pomoce dydaktyczne opisane w tym zeszycie nie tylko urozmaicają rachunki, ale też pomagają uwolnić się od rachunków za pomocą paluszków. Oczywiście rachowanie na palcach nie jest złe, jednak ma pewne wady:

- nie wszystkie działania da się tak wykonać,
- nie wszystkie aspekty działań arytmetycznych dają się zobrazować na palcach,
- zbyt częste sięganie po to „liczydło” prowadzić może do niekorzystnych nawyków, a zatem usztywnień w rozumowaniu, co w przyszłości przeszkodzi w równoległym rachowaniu i zapisywaniu wyników rachunków, ponieważ palce-liczmany nie będą mogły pisać, i odwrotnie.

Wprowadzenie do codziennego użytku różnego rodzaju prostych liczydeł wzbogaca zajęcia, ułatwia rachowanie, ukazuje własności liczb i działań.

W tym zeszycie opiszemy za pomocą kilkunastu sytuacji edukacyjnych najprostsze i najbardziej użyteczne liczydła. Będą to przede wszystkim liczbowe chodniczki i dywaniki, mówiąc inaczej: plansze z liczbami, po których przeskakują pionki kierowane ręką dziecka.

Wprowadzenie takich liczydeł ułatwia dziecku m.in.

- poznawanie porządku liczb mniejszych od stu;
- zrozumienie zasady dopełniania do dziesięciu przy przekraczaniu pełnych dziesiątek w dodawaniu i odejmowaniu;
- dodawanie dziesiątek do dowolnych liczb;
- wykonywanie dodawania i odejmowania bez konieczności zapisywania odpowiednich liczb (dla wielu dzieci pisanie stanowi dodatkową trudność);
- sprawdzenie poprawności podawanych przez siebie odpowiedzi przez wykonywanie prostych czynności, tj. przesuwanie palca w przeciwną stronę niż podczas wykonywania obliczeń;
- stanowi wprowadzenie do mnożenia i dzielenia liczb oraz do poznawania własności liczb związanych z wielokrotnościami i dzielnikami (rozpoznawanie regularności w ułożeniach liczb podzielnych przez wspólny dzielnik jest ciekawym i ważnym ćwiczeniem na dywaniku liczbowym).



Dziurawe karteczki i liczmany

Podczas kształtowania pojęcia liczby dzieci powinny przeliczać drobne przedmioty. Zestaw liczmanów różnego rodzaju jest stałym elementem wyposażenia przedszkolaka i pierwszoklasisty. Te przedmioty stanowią materialną reprezentację pojęcia liczby i operacji na liczbach związanych z przeliczaniem, a także dodawaniem i odejmowaniem.

Drobne przedmioty takie jak guziki, kasztany, żołądźcie, kamyki, szlifowane kamienie, koraliki powinny spełniać warunki bezpiecznego i sprawnego używania. Nie mogą być ani zbyt małe (by dziecko nie włożyło ich do nosa lub ucha), ani zbyt duże i zbyt ciężkie. Zbyt okrągłe będą się turlały w dowolną stronę i uciekały. Nie powinno też być ich zbyt dużo. Odpowiedni zestaw takich liczmanów, do których zaliczymy także klasyczne kolorowe patyczki, musi znajdować się w zasięgu ręki każdego ucznia, aby podczas rozwiązywania zadań lub gry mógł on łatwo po niego sięgnąć. Po każdym użyciu uczeń powinien je zapakować do odpowiedniego pudełka lub woreczka i zabezpieczyć przed zgubieniem lub wymieszaniem z innymi przedmiotami.

Na ścianach pomieszczeń edukacyjnych często umieszczane są specjalnie kolorowe liczmany, wycięte w tym celu kółka lub zajaczkę. Dzięki nim uczeń kojarzy czynności przeliczania ze znakiem odpowiedniej liczby. Warto tę tradycję utrzymać, urozmaicając inną nieco reprezentacją.

Sytuacja edukacyjna (edukacja przedszkolna)

Cele

- kształtowanie pojęcia liczby,
- dostrzeganie analogii,
- porządkowanie zbiorów według kryterium liczebności.

Efekty

Uczeń:

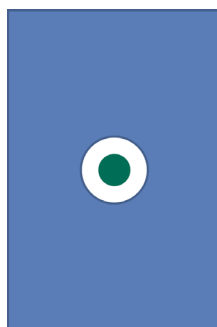
- dostrzega regularności w pojawiających się zmianach oraz konsekwencje w serii swoich czynności,
- potrafi uogólnić swoje działania do zasady ułożenia liczb w kolejności od najmniejszej do największej, od lewej do prawej.

Potrzebne materiały: prostokątne kawałki papieru gazetowego po kilka dla jednego ucznia, drobne przedmioty oraz nożyce.

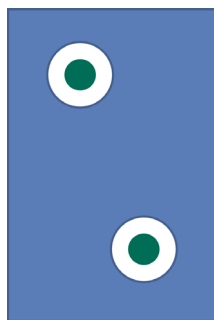


Przebieg zajęć

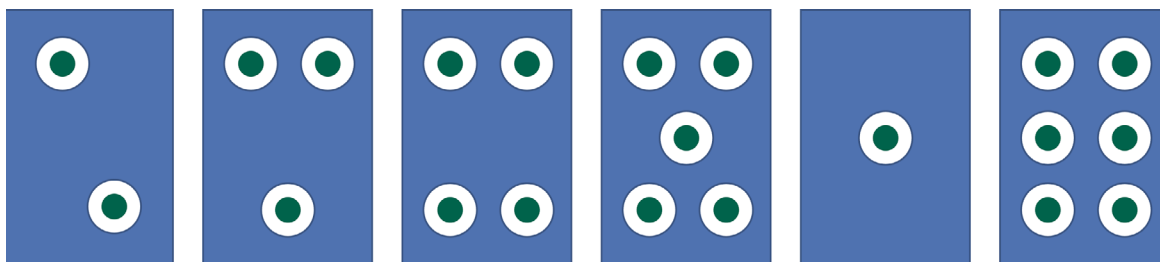
1. Nauczyciel wycina w kartce jeden otwór, zginając ją tak, żeby uzyskać w miarę symetryczny, owalny kształt. Rozkłada kartę na stole lub przymocowuje do tablicy, a następnie umieszcza swój drobny przedmiot w wyciętym otworze. Nie komentuje tego, co robi. Dzieci przyglądają się jego pracy z uwagą. Następnie prosi uczniów o zrobienie tego samego.



2. Dzieci powtarzają te czynności. Nauczyciel udziela pomocy tym, którym wycinanie sprawia kłopot. Otwór nie musi być wykonany nożyczkami, można go równie dobrze wydrzeć w kartce.
3. Nauczyciel bierze kolejną kartkę i z tajemniczą miną, nic nie mówiąc, wycina w niej dwa otwory w taki sam sposób, a następnie prosi uczniów o zrobienie tego samego.



4. Nauczyciel sięga po kolejną karteczkę i mówi: „Jak myślicie, co zrobię teraz? Nie mówicie głośno, tylko to zróbcie”. Zajęcia mogą przejść w fazę samodzielnej pracy dzieci. Te, które znają oczekiwaną odpowiedź („wytnie pani trzy dziury” lub podobną), zajmą się wycinaniem. Te zaś, które nie są pewne swojej odpowiedzi (nie musi być ona oczywista), przyglądają się czynnościom nauczyciela i powtarzają je, jak robiły to wcześniej. Zależy nam na tym, żeby w pewnym momencie wszystkie dzieci uchwyciły logikę, czy też rytm lub konsekwencję serii kolejnych wycięć i ułożyły przed sobą szlaczek złożony z dziurawych kartek.



Dzięki tej prostej zabawie, w której coraz trudniej jest uzyskać coraz większą liczbę otworów w kartce, dzieci kształtują pojęcie liczby:

- w jej aspekcie mnogościowym (liczebność zbiorów),
- w aspekcie porządkowym (kolejność rosnąca ciągu liczbowego),

Uzyskane formy są również odbiciem pól kostki do gry. Warto zwrócić uwagę na systematyczny rozkład kropek na kostkach do gry. Z czasem dzieci uczą się rozpoznawać odpowiednie liczby, nie przeliczając kropek. Ich układ to nic innego jak symboliczne, ale w ścisłym związku z czynnościami na konkretach, przedstawienie liczb.

Przywiązywanie do tych przedstawień formalnych znaków liczb używanych na wyższych etapach edukacji nie wydaje się istotne i wskazane. Ważniejsze jest to, co dziecko wykonuje na konkretach oraz co odbija się w jego umyśle w postaci graficznych przedstawień własnych działań na kartkach i drobnych przedmiotach. To właśnie te czynności angażują uczniowskie umysły, poprzedzają konieczne operacje intelektualne lub czasem uzupełniają luki w łańcuchach przyczynowo-skutkowego rozumowania dziecka.

Po tym ćwiczeniu możemy zachować jeden zestaw kart, wieszając go w odpowiednim porządku na ścianie/tablicy. Możemy dodać jeszcze jedną lub dwie karteczki wykraczające poza zakres ćwiczenia wykonanego wspólnie z dziećmi, czym dajemy dzieciom do myślenia: „Co oznaczają te nowe karteczki, przecież nie było ich na zajęciach... Aha, to o to chodzi!” – myśli dziecko. Sugerujemy w ten sposób bez słów, że zbiór, którym się zajęliśmy, może się ciągnąć i ciągnąć, w nieskończoność.

Komentarz: Należy tu jeszcze raz podkreślić, że na wczesnych etapach edukacyjnych warto opóźniać używanie abstrakcyjnych znaków matematycznych. Ważniejsze jest odkrywanie, konstruowanie pojęć, które kryją się pod tymi znakami oraz konkretne czynności na przedmiotach, które te intelektualne, ukryte przed wzrokiem operacje poprzedzają, a z czasem też będą reprezentować. Istotne jest, aby dopiero dobrze ukształtowane operacje umysłowe były ubrane w swoje symboliczne reprezentacje. Odwrócenie tego porządku prowadzi do nadmiernej formalizacji uczenia się, a zatem do tworzenia błędnych schematów poznawczych.

To proste ćwiczenie z użyciem konkretnych przedmiotów, zakończone urozmaicheniem wystroju pomieszczenia edukacyjnego, ma swoją naturalną kontynuację. Zbudujemy teraz chodniczek liczbowy.



Chodniczek liczbowy – kropki

Sytuacja edukacyjna (edukacja przedszkolna, klasa I – początek roku szkolnego)

Cele

- kształtowanie umiejętności dziecięcego liczenia,
- łączenie czynności konkretnych z pojęciem liczby w aspekcie mnogościowym i porządkowym,
- konstruowanie liczbowego chodniczka, użytecznego liczydła do dodawania i odejmowania oraz planszy do gier opisanych w Zeszycie 2.

Efekty

Uczeń:

- dzieli prostokątny pasek na mniej więcej równe części,
- dostrzega analogie między swoimi działaniami a tym, co robił na zajęciach z dziurawymi karteczkami,
- bezbłędnie rysuje odpowiednie liczby kropek na odpowiednich polach,
- określa liczby kropek na polach od 1 do co najmniej 6 bez przeliczania.

Potrzebne materiały: paski papieru o wymiarach około 4 cm x 40 cm, po kilka dla poszczególnych uczniów oraz karteczki o wymiarach około 4 cm x 4 cm. Mogą też być nieco większe, ale przy zachowaniu proporcji.

Przebieg zajęć

1. Nauczyciel rozdaje dzieciom paski, a następnie uczy, jak podzielić je na równe części. Przykłada swój pasek do tablicy i do niego kwadratową karteczkę tuż przy lewym jego brzegu. Następnie zaznacza mazakiem linię wyznaczoną przez prawy brzeg mniejszej karteczki.



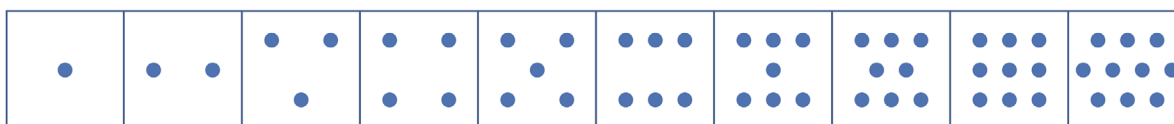
2. Podobnie zaznacza kolejne kawałki na pasku, a dzieci powtarzają te czynności, niektóre wcześniej, niektóre później dostrzegają ich konsekwentny porządek. W końcu powstaje taki chodniczek.





3. Być może układ tych pól skojarzy się niektórym uczniom z serią dziurawych karteczek widoczną na ścianie. Przeniesienie tego, co widzą na ścianie, na pasek wyda im się wtedy bardzo naturalne. Karteczki były zbyt duże, żeby umieścić je we własnym matematycznym zestawie podręcznych pomocy. Takie paski znacznie łatwiej przechować. Uczniowie przerysowują kropki na swoje paski, korzystając z pomocy dydaktycznej umieszczonej wcześniej na ścianie. Rozmieszczenie kropek na polach, które nie mają swego odpowiednika na ścianie, jest zadaniem dla ucznia.

Nauczyciel powinien mieć w pogotowiu kilkanaście pasków już podzielonych na 10 równych prostokątów, aby dzieciom, które popełniły błędy przy kropkowaniu pól, umożliwić sprawne zakończenie ćwiczenia.



Piktogramy liczb większych od 6 stają się coraz mniej czytelne, ale czynności przeliczania kropek umieszczonych na karteczkach w różnych konfiguracjach w określonym czasie to bardzo ważna sprawność intelektualna. Zatem nasze kolejne zajęcia wynikające z tego będą podążać w co najmniej dwóch kierunkach:

1. Zamiana kropek na liczby zapisane za pomocą cyfr i wydłużanie chodniczka liczbowego do 20.
2. Tworzenie kart do przeliczania.

Kierunek 1. Chodniczek do 20 – liczby

Sytuacja edukacyjna (edukacja wczesnoszkolna, klasa I)

Cele

- rozszerzenie zakresu liczbowego do 20,
- rozumienie pojęcia liczby w aspekcie mnogościowym i porządkowym,
- wykonywanie dodawania i odejmowania w zakresie 20 za pomocą chodniczka liczbowego.



Efekty

Uczeń:

- przesuwa pionek na chodniczku o tyle pól, ile oczek uzyskał na kostce, wymieniając kolejne liczebniki,
- odczytuje liczbę z pola, na którym stoi pionek (nie myli jej z liczbą uzyskaną na kostce),
- rozumie, że nie można przesunąć pionka o więcej pól niż 6,
- planuje możliwe sekwencje wyników rzutu kostką prowadzące do określonego wyniku (rozkłada liczbę na składniki mniejsze od 7),
- dopełnia liczbę do zadanej,
- rozumie, że przesunięcie pionka w prawo odpowiada dodawaniu, a w lewo odejmowaniu liczb.

Potrzebne materiały: paski podzielona na jednakowe kwadratowe pola ponumerowane od 1 do 20 (patrz przykład niżej), drobne przedmioty nie większe od pól chodniczka, kostka do gry dla każdego ucznia.



Przebieg zajęć

1. Nauczyciel demonstruje na tablicy chodniczek liczbowy, większy niż ten, który leży przed uczniami. Umieszcza pionek-magnes przed liczbą 1 i rzuca kostką. Objasnia przy tym, czym się będziemy zajmować i jakie zadania wykonywać, czyli opowiada o zabawie polegającej na wędrowaniu pionkiem po chodniczku w lewo albo w prawo.
2. Nauczyciel przesuwa pionek o tyle pól w prawo, ile oczek uzyskał na kostce, wymieniając przy tym kolejne liczebniki. Dzieci wykonują te same czynności i wszyscy oglądają rezultaty na chodniczkach w pobliżu. Nauczyciel pyta o to, kto doszedł dalej niż do liczby 4, kto bliżej, a czyj pionek stanął na liczbie 4. To samo ćwiczenie można powtórzyć z liczbą 5 lub inną. Warto też zadać pytanie: „Czy komuś udało się umieścić pionek na liczbie 7?”. Jeśli uczniowie zauważą, że nikomu się to nie udało, warto zadać pytanie: „A dlaczego?”. Spodziewamy się odpowiedzi: „Bo takiej liczby nie ma na kostce”.
3. Nauczyciel rzuca kostką raz jeszcze i uczniowie powtarzają tę czynność. Wszyscy kontynuują przesuwanie pionków w prawo od miejsca, w którym zatrzymali się w poprzedniej kolejce rzutów.
4. Zadanie jest kontynuowane aż pionek znajdzie się na polu z liczbą 20. Aby stanąć na nim, trzeba wyrzucić na kostce odpowiednią liczbę, czyli stojąc na polu 16, trzeba wyrzucić dokładnie 4. Dzieci uczą się tej reguły, która będzie wykorzystywana w grach opisanych w Zeszycie 2.



5. Każdy uczeń powtarza ćwiczenie od początku. Rzuca kostką i przesuwają pionek po swoim chodniczku. Podczas tego ćwiczenia liczy lub zaznacza za pomocą kreseczek, ile razy musiał rzucić kostką, żeby zakończyć ćwiczenie. Po jego zakończeniu nauczyciel rozmawia z dziećmi na temat liczby rzutów każdego z nich:

- „Kto musiał rzucać najwięcej razy, a kto najmniej?”;
- „Jakie liczby musiałyby wypaść na kostkach, żeby ćwiczenie zakończyć w najmniejszej liczbie rzutów, czyli w czterech?”.

Jest kilka możliwych odpowiedzi na to pytanie, więc wielu uczniów może opracować swoją, inną niż pozostali. Jest to ćwiczenie na rozkładanie liczby 20 na cztery składniki. Łatwo można dostosować je do rachunków na mniejszych liczbach, jeśli ustalimy, że celem będzie na przykład liczba 15. W dalszym ciągu zapisy symboliczne nie są tu potrzebne, a na wczesnych etapach kształtowania pojęć w klasie I nie są wręcz wskazane. W tej zabawie dzieci wykonują dużo rachunków pamięciowych, a ta umiejętność należy do bardzo ważnych celów programowych edukacji wczesnoszkolnej.

Komentarz: Korzystając z efektów tego ćwiczenia, warto wykonać prostą pomoc metodyczną – koralikowe liczydełko, czyli dwadzieścia koralików w czterech kolorach, które wspólnie z dziećmi nawlecemy na kawałek żyłki lub drutu.



Zajmijmy się teraz kontynuacją drugiego wątku zajęć z zaznaczaniem i przeliczaniem kropek. Umiejętność dostrzegania regularności, rytmów, układów geometrycznych i kontynuowania serii na podstawie wniosków wyciąganych z sytuacji początkowej jest ważnym celem kształcenia stawianym w edukacji matematycznej. Dalsze sukcesy ucznia w nauce matematyki i innych przedmiotów zależą od sprawności w rozwiązywaniu zadań z wykorzystaniem wszelkiego rodzaju szlaczków, patyczków nierównej długości i kolorowych klocków, które warto mieć w swoich szkolnych zasobach podręcznych².

Do zasobów tych włączymy karty z prostymi rysunkami postaci ludzi i sylwetkami zwierząt ilustrujące niezbyt liczne zbiory przedmiotów od 1 do 10 lub większe. Obiekty do przeliczania są ustawione w równe rzędy, jeśli to możliwe, albo w rzędy po tyle samo i jeszcze krótszy rząd. Dzieci mogą przeliczać te obiekty różnymi sposobami, np. parami. To bardzo cenna pomoc. Można ją wykonać z pomocą komputera, nie warto wycinać i przyklejać

² W tym miejscu warto przywołać testy sprawdzające poziom operacyjnego myślenia dzieci na poziomie konkretnym opracowane przez prof. Edytę Gruszczyk-Kolczyńską. Odnoszą się one do umiejętności wymaganych podczas rozwiązywania wielu zadań matematycznych w szkole. W naszym kontekście chodzi o ustalanie stałości wielkości nieciągłych oraz rozumowania podczas wyznaczania konsekwentnych serii.



poszczególnych figurek. Podobnie można wykonać pomoce do następnego ćwiczenia związanego z przeliczaniem.

Kierunek 2. Karty do przeliczania – kropki

Sytuacja edukacyjna (edukacja przedszkolna, edukacja wczesnoszkolna)

Cele

- kształcenie umiejętności przeliczania według dostrzeżonych regularności wzoru,
- wyrabianie sprawności percepcyjnej,
- kształcenie umiejętności mnożenia liczb naturalnych w zakresie 25.

Efekty

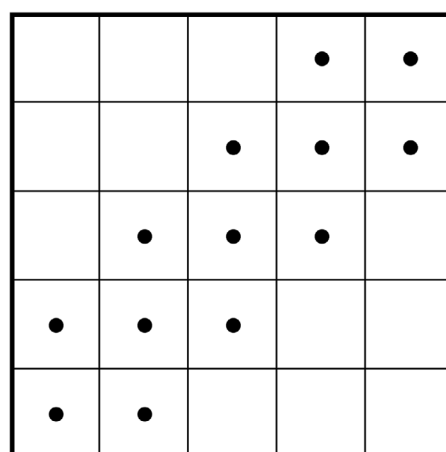
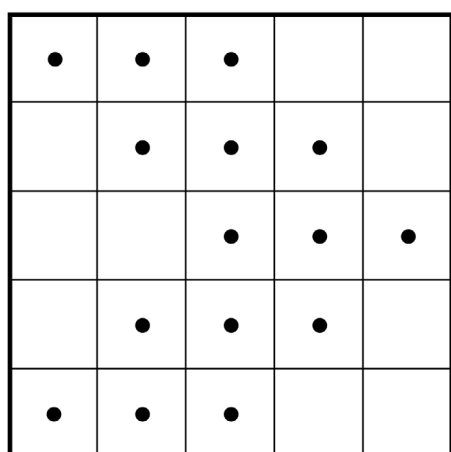
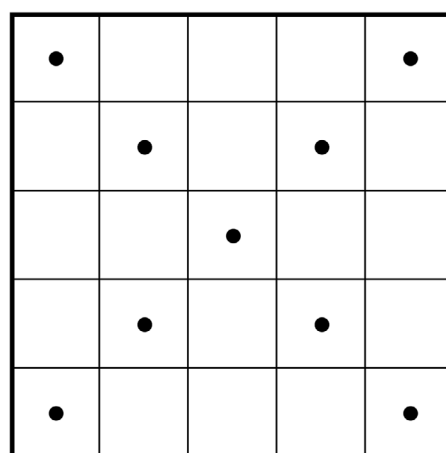
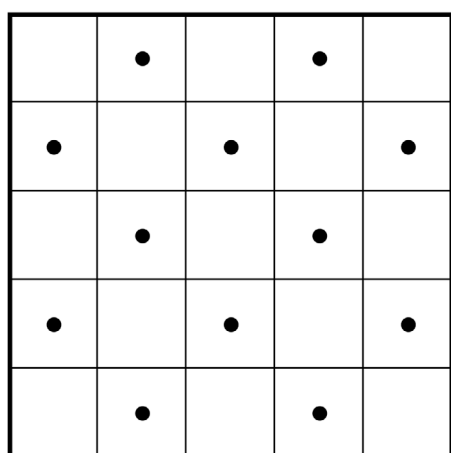
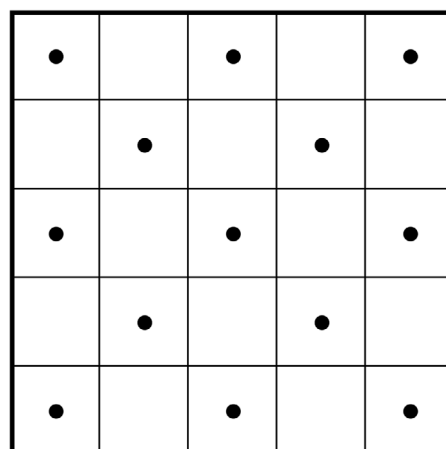
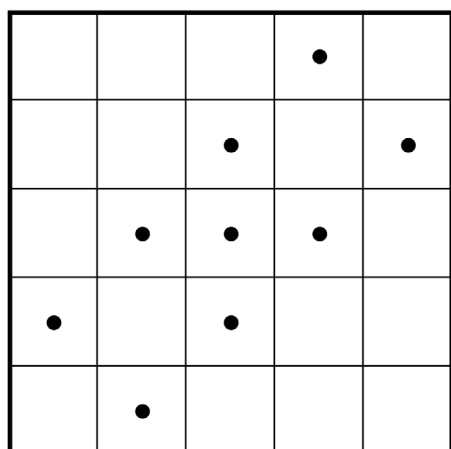
Uczeń:

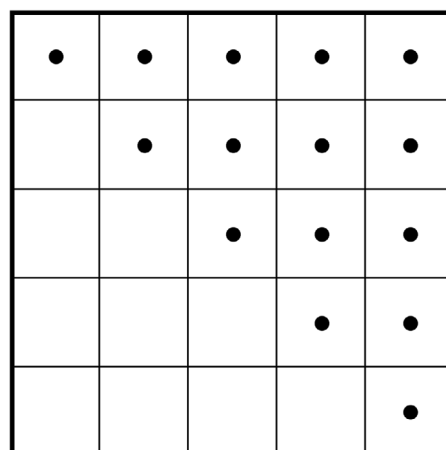
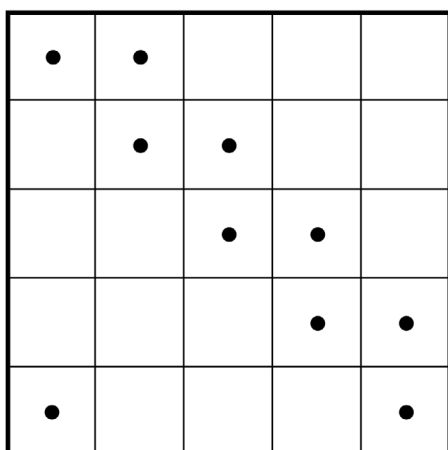
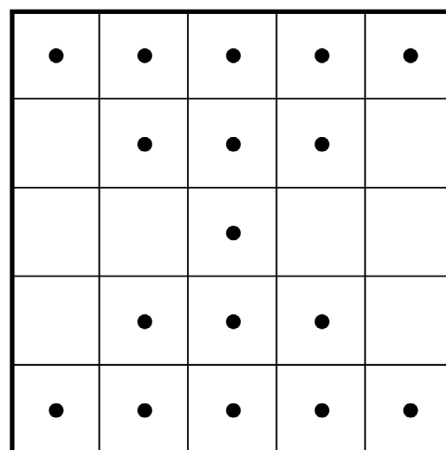
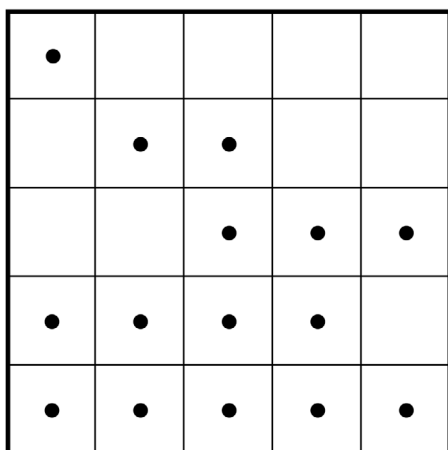
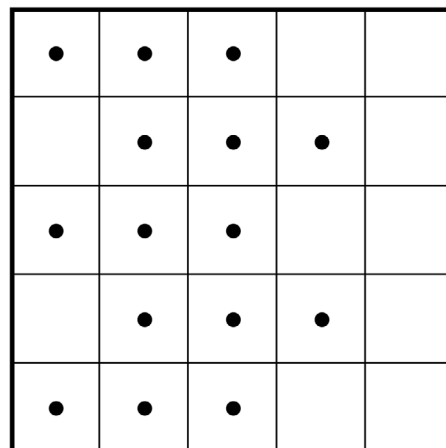
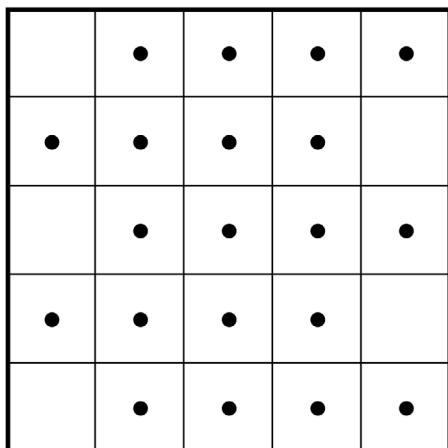
- grupuje przeliczane elementy po dwa lub po trzy, lub w inny sposób ułatwiający liczenie,
- dostrzega i potrafi opisać dostrzeżone regularności w ułożeniu kropek na planszy, używając przy tym liczb i słów „rzędek”, „grupa”, „przekątna”, „ukos” lub analogicznych.

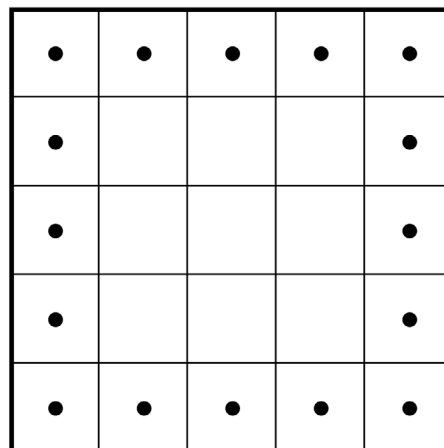
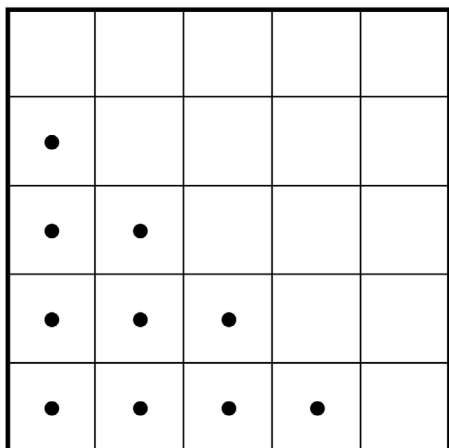
Potrzebne materiały: karty z odpowiednimi układami kropek. Może skorzystać z zestawów zamieszczonych poniżej lub też wymyślać własne, np. w tablicach o wymiarach 4 x 4 lub 3 x 3.

		•		•
	•		•	
•		•		•
	•		•	
•		•		

		•		
	•	•	•	
•	•	•	•	•
	•	•	•	
		•		





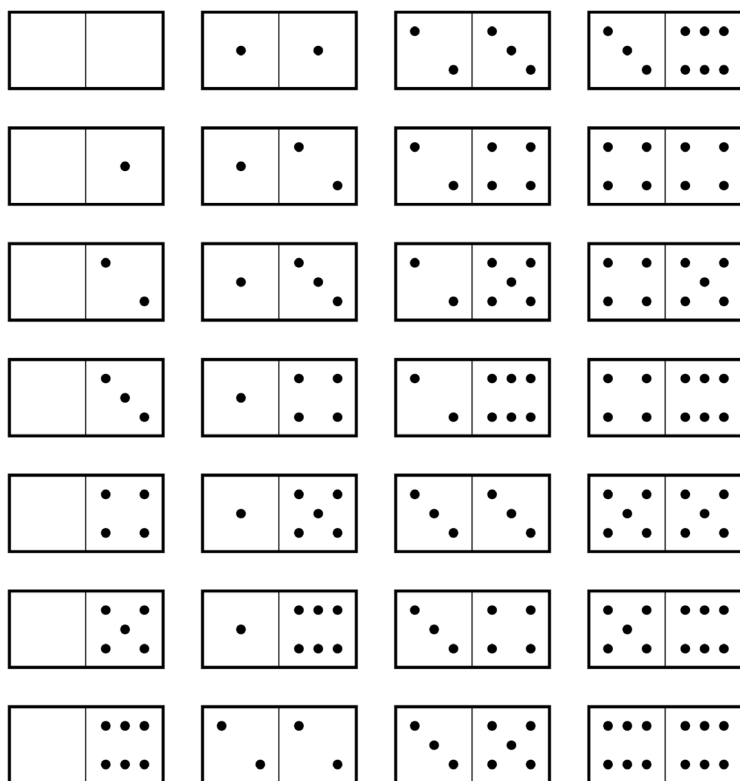


Przebieg zajęć

1. Nauczyciel prezentuje karty z kropkami i zachęca dzieci do przeliczania kropek. Jedne dzieci będą robiły to szybciej, inne wolno. Wszystkie karty będą wyglądały dla dzieci nieco inaczej, gdy się je obróci o pewien kąt (niekoniecznie prosty). Karty te mogą powracać do zabawy wielokrotnie. Po pewnym czasie zabawa jednak może się dzieciom znudzić i wtedy warto wprowadzić element rywalizacji.
2. Nauczyciel skraca czas ekspozycji kart. Żeby rozwiązać zadanie, trzeba znaleźć sprytny sposób przeliczania. Nie można już liczyć kropeczek pojedynczo, należy je grupować po tyle samo, przemieszczać w wyobraźni, by utworzyć łatwiejsze do ogarnięcia wzory (dzieci na poziomie przedoperacyjnym nie będą mogły zastosować tej strategii). To ćwiczenie pozwala na diagnozowanie trudności uczniów. Możemy też czasem objaśniać, dostrzeżenie których regularności i wzorów pomaga w przeliczaniu.
3. Po każdym ćwiczeniu nauczyciel rozmawia z uczniami o tym, w jaki sposób przeliczali kropki. Niektórzy będą widzieli łatwe do przeliczenia poziome układy po dwie, po trzy, inni dostrzegą sekwencje ukośne. Podczas tych zajęć dzieci nie tylko poprawiają sprawności rachunkowe związane z przeliczaniem przedmiotów, ale też ćwiczą umysł w dostrzeganiu regularności, wyciąganiu z nich wniosków oraz uczą się mnożyć i dodawać liczby.

Jeszcze trochę kropek. Domino, czyli pojawia się zero

Domino to stara gra, która składa się z 28 kamieni. Dzieci mogą w nią grać według klasycznych zasad, czyli dokładać na zmianę kostki o tych samych liczbach. Mogą też użyć kostek, które łatwo przygotować na komputerze, a potem wydrukować i wyciąć, do rozwiązywania zadań rachunkowych.



Cele

- kształcenie dziecięcego liczenia,
- rozumienie układu liczb w tabeli z użyciem pojęć przekątna, wiersz, kolumna,
- kształcenie umiejętności porównywanie liczb z użyciem pojęć mniejsze, większe, równe,
- układanie kostek domina według określonych zasad i sprawdzanie, czy zasady te są zachowane,
- dostrzeganie analogii między zbiorem a symbolicznym opisem jego liczebności,
- używanie liczby zero reprezentowanej przez puste pole.

Efekty

Uczeń:

- przelicza kropki w każdym wierszu, kolumnie i po przekątnej układanki z kostek domina 6 x 6,
- potrafi powiązać zapis liczby z jej ikonyczną reprezentacją (kropki na polu domina),
- rozumie, że brak kropek na polu oznacza liczbę zero,
- układa szlaczek z kostek domina według zasady dotyczącej sumy liczb na sąsiadujących kostkach.



Potrzebne materiały: karteczki z układem kostek domina (punkt 1 opisu), 28 kostek domina oraz chodniczki liczbowe do 12.

Przebieg zajęć

1. Nauczycielka pokazuje następujący układ kostek.

• •	•	• •	• •
• •	•	• •	• •
• •	• •	•	• •
• •	• •	• •	• •

Następnie mówi, pokazując kolumny, wiersze i przekątne: „Przyjrzyjcie się uważnie, w jaki ciekawy sposób ktoś ułożył te kostki. Suma oczek w każdej kolumnie, w każdym wierszu i po przekątnych jest taka sama. Policzcie, ile wynosi. Sprawdźcie, czy rzeczywiście się zgadza”.

2. Kiedy dzieci sprawdzą już magiczną własność otrzymanego kwadratu, proponujemy im następujące zadanie: „Ułóżcie przy każdym polu chodniczka kostki domina w taki sposób, aby liczba z chodniczka i suma oczek na kostce była taka sama. Zadanie to można wykonać na kilka sposobów” (Gruszczyk-Kolczyńska, Zielińska, 2009).

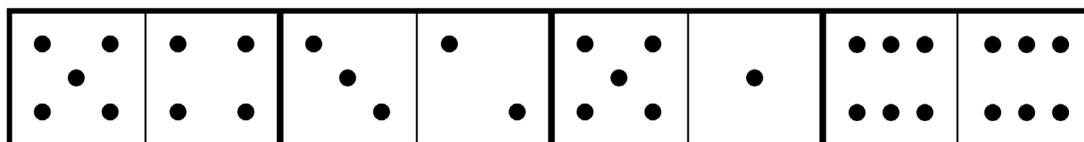
	•	•	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •
		•	•	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

3. Inne zadania. Nauczyciel mówi: „Ułóżcie kostki domina w prostokąty, aby suma wszystkich oczek na nich była równa 45”. Dzieci szukają kostek. Mogą to robić w parach lub pojedynczo, jeśli mamy tyle kostek domina. Potem zadajemy dzieciom inne liczby.



4. W klasycznym dominie układa się kostki zgodnie z zasadą: łączymy kostki z tą samą liczbą kropek. Tę regułę można zmieniać. Nauczyciel: „Ułóżcie klocki domina w szlaczek tak, żeby suma liczb na spotykających się klockach była równa 7. Na przykład:



Który klocek można położyć jako kolejny?”.

Liczby na dywaniku (edukacja wczesnoszkolna)

Chodniczek liczbowy rozrasta się powoli. Można go wydłużać dalej i warto to robić. Centymetr krawiecki jest takim chodniczkiem z liczbami od 1 do 100. Można też spotkać dłuższe. Może być bardzo potrzebny do ćwiczeń związanych z mierzeniem oraz do dodawania i odejmowania, w tym drugim zastosowaniu jednak nie wydaje się zbyt poręczny. Dlatego musimy wprowadzić kolejną pomoc dydaktyczną: liczbowy dywanik. Aby go skonstruować, nie będziemy jednak cieli na kawałki centymetra krawieckiego. Rozpocniemy od pustej planszy dywanika w kształcie kwadratu o stu polach.

Sytuacja edukacyjna

Cele

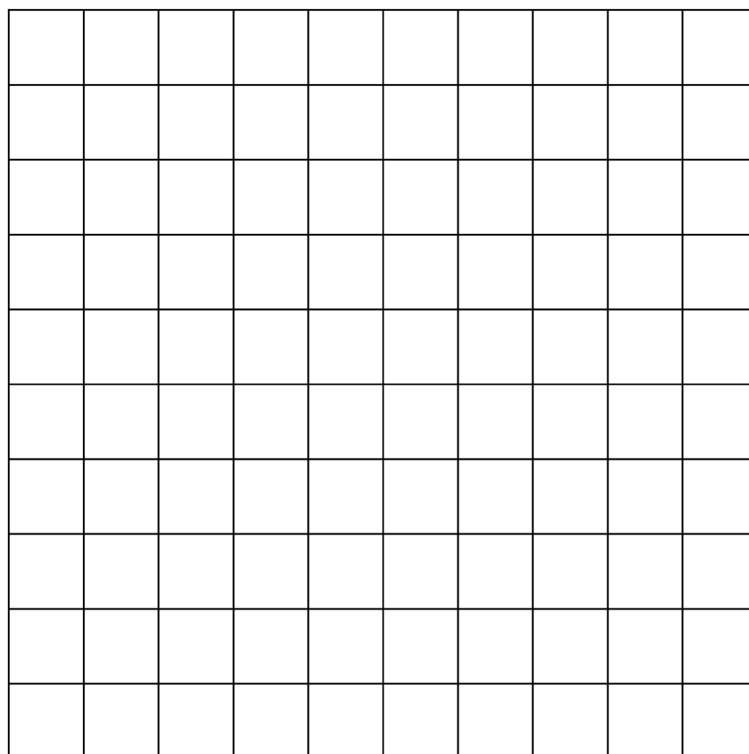
- kształcenie umiejętności reprezentowania dodawania i odejmowania liczb od 1 do 100 bez użycia cyfr (można ten zakres ograniczyć do mniejszego, jeśli zajęcia organizujemy w przedszkolu),
- kształcenie zasad dodawania i odejmowania w pozycyjnym systemie dziesiętkowym.

Efekty

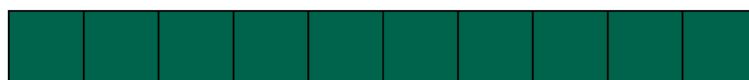
Uczeń:

- przedstawia i odczytuje liczby do 100 za pomocą pasków układanych na planszy przeliczając paski po 10,
- rozumie, że reprezentowana liczba nie zależy od sposobu rozmieszczenia pasków na planszy pod warunkiem, że paski nie nakładają się na siebie i nie wystają poza planszę,
- przedstawia dodawanie i odejmowanie dwóch liczb za pomocą pasków oraz odczytuje z planszy wyniki tych działań.

Potrzebne materiały: nożyce, kilkadziesiąt plansz o wymiarach ok. 20 cm x 20 cm podzielonych na kwadraty:

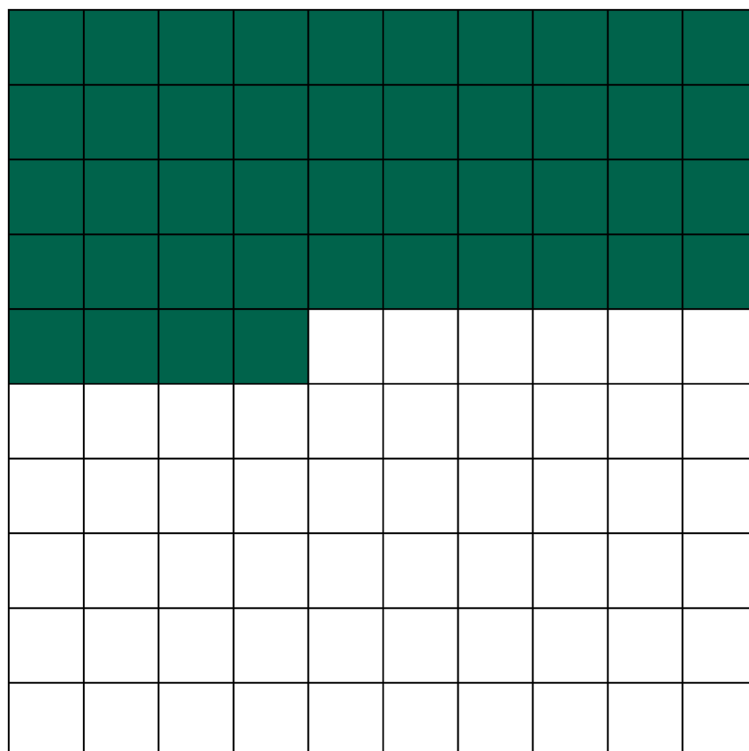


oraz kolorowe paski po 10 pól każdy do układania na planszach:



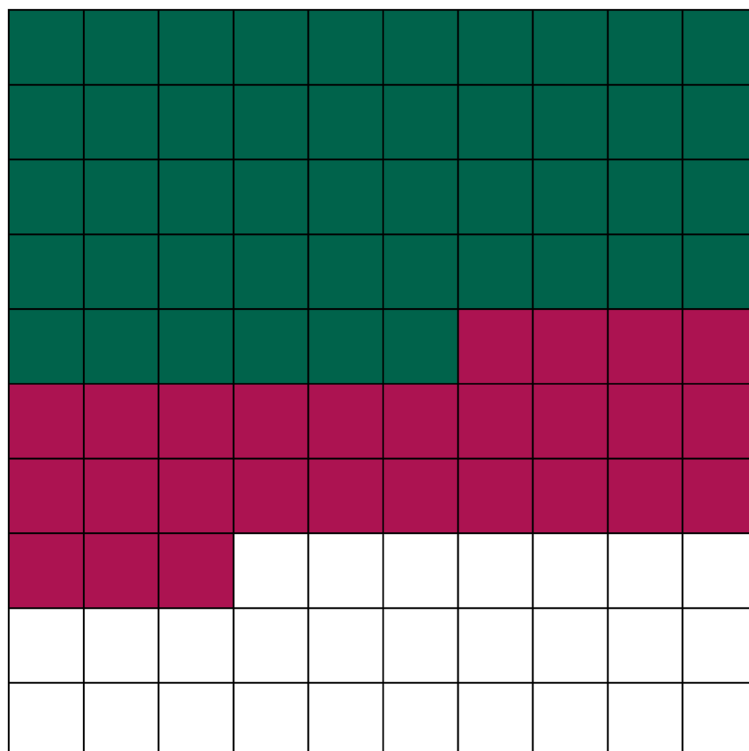
Przebieg zajęć

1. Nauczyciel objaśnia, do czego służyć będzie taki dywanik: „Umiecie już dodawać i odejmować liczby mniejsze od 20. Niektórzy nawet dodają i odejmują większe. Dzisiaj będziemy bawić się liczbami, pokazując je na planszy. Będziemy układać i rozwiązywać zagadki o liczbach, na przykład takie jak ta”.
2. Nauczyciel zakrywa kolorowymi paskami niektóre pola planszy, przytwierdzonej na tablicy i pyta: „Jak myślicie, ile pól zakryłam”.



Tego typu ćwiczenia można powtarzać, zmieniając położenia pasków na tablicy i ich liczbę. Można też pytać o liczbę pól niezakrytych. Uczniowie przenoszą układ z tablicy na swoje plansze. Mogą też przy tym modyfikować położenie pasków, ale tak, żeby liczba pól zakrytych przez nauczyciela i przez uczniów była taka sama.

3. Dzieci bawią się indywidualnie lub w parach. Zakrywają pola na planszy i odczytują liczbę zakrytych pól lub odwrotnie – wybierają liczbę i zakrywają odpowiednią liczbę pól. Nauczycielka sprawdza, czy wybrani uczniowie poprawnie używają planszy i pasków.
4. Naturalną konsekwencją zadania jest układanie na planszy dwóch liczb za pomocą pasków w dwóch kolorach.



Nauczyciel pyta: „Jakie liczby przedstawione są na naszym dywaniku? Ile pól zostało zakrytym w sumie?”.

Tego typu zabawy, w których nauczyciel i uczniowie na przemian wykonują podobne czynności i w których uczniowie stopniowo przejmują inicjatywę w zakresie konstruowania i rozwiązywania zadań, mogą trwać długo i warto do nich powracać. Zanim na dywaniku pojawią się liczby, warto jeszcze poćwiczyć odejmowanie. Należy też zauważyć, że obliczeniom uczniowskim nadal nie towarzyszą zapisy symboliczne. Cyfry można i trzeba oczywiście wprowadzać, jednak na tym etapie (pierwsze doświadczenia z rachunkami pamięciowymi) nie wymagamy od uczniów symbolicznych zapisów wykonywanych działań.

Dywanik liczbowy do 100 (edukacja wczesnoszkolna)

Sytuacja edukacyjna

Cele

- kształcenie umiejętności reprezentowania dodawania i odejmowania liczb od 1 do 100 (można ten zakres ograniczyć do mniejszego, jeśli zajęcia organizujemy w przedszkolu) z użyciem liczbowego dywanika,
- kształcenie umiejętności dodawania i odejmowania liczb w pamięci z wykorzystaniem planszy jako liczydła lub bez niej.



Efekty

Uczeń:

- prawidłowo uzupełnia pola dywanika liczbami,
- dodaje i odejmuje dwie liczby na dywaniku różnymi metodami, także przez dodawanie (odejmowanie) dziesiątkami z ewentualnym odbieraniem lub dopełnianiem,
- wie, że liczby leżące pod lub nad różnią się o wielokrotności 10,
- dostrzega prawidłowości w dodawaniu do danej liczby i odejmowaniu od danej liczby pełnych dziesiątek.

Potrzebne materiały: pionki do gry lub drobne przedmioty wielkości pół planszy – po dwa na jednego ucznia, plansze dywanika częściowo wypełnione liczbami:

1	2	3	4	5	6				
					16	17	18		
				25				29	
			34						40
41	42		44	45	46				
51						57	58	59	
61						67	68	69	
71		73		75		77		79	
81	82		84		86		88		
91		93		95		97		99	100

Przebieg zajęć

1. Nauczyciel rozdaje uczniom nie do końca wypełnione dywaniki liczbowe i prosi o wypełnienie kilkunastu pustych pól. Dywanik nie musi, a nawet na początku nie powinien być w całości wypełniony liczbami. Stwarza to dodatkową ciekawą trudność do pokonania podczas wykonywania obliczeń. Niewypełnioną do końca, większą planszę wiesza na tablicy.
2. Nauczyciel: „Teraz objaśnię wam, w jaki sposób będziemy przedstawiać na dywaniku liczby tak, żeby już nie używać kolorowych pasków. Jak myślicie, jaka liczba została



zaznaczona?”. Nauczyciel ustawia swój magnetyczny pionek na dowolnym pustym polu, np. na polu, na którym powinna być liczba 37. Pytanie nie powinno być trudne. Nauczyciel prosi o zaznaczenie pionkiem innych liczb. Uczniowie wykonują polecenia.

3. Nauczyciel: „Niech każdy postawi swój pionek liczbie 32. Przesuńcie teraz pionek o 7 pól w prawo. Na jakiej liczbie stoi pionek po przesunięciu o 7 pól?”. Kilka tego typu ćwiczeń (bez przekraczania progu najbliższej dziesiątki) uświadamia dzieciom, że czynność podobną wykonywali wcześniej na chodniczku oraz że uzyskali wynik dodawania: „32 dodać 7, czyli 39”. Można już przekroczyć próg dziesiątki.
4. Nauczyciel: „Postawcie pionek na liczbie 48 i przesuniecie go o 9 pól w prawo”. Oczekujemy, że dzieci spontanicznie przejdą do kolejnej linijki dywanika i zatrzymają się na liczbie 57. Teraz znów można wykonać podobne ćwiczenia polegające na dodawaniu liczb z przekroczeniem jednego progu. Za każdym razem prosimy dzieci o wypowiedzenie działania, które właśnie wykonały. Dzieci cierpliwie mówią: „48 dodać 9 równa się 57”.
5. W zależności od czasu, jaki poświęciliśmy na te ćwiczenia, możemy przejść do ich podsumowania albo prowadzić je dalej. Kolejnym krokiem zatem, na tych samych lub kolejnych zajęciach, będzie dodawanie do dowolnej liczby pełnych dziesiątek. Celem tych ćwiczeń jest zorientowanie się, że dodawanie pełnymi dziesiątkami polega na przesuwaniu pionka w dół planszy o tyle pól, ile dziesiątek ma liczba. Tę regułę w niezmiennionej postaci stosuje się także do dodawania innych liczb, także mniejszych od 10. W tym najprostszym przypadku dzieci odkrywają, że dodanie np. liczby 6 można przeprowadzić, nie tylko przeskakując pionkiem o 6 pól w prawo, ale też przeskakując o jedno pole w dół i o 4 w lewo.

Jesteśmy zatem blisko przejścia do odejmowania liczb za pomocą dywanika, czyli nowego tematu zajęć. Realizujemy je krok po kroku według schematu zajęć na dodawanie: najpierw odejmowanie liczb jednocyfrowych bez przekraczania progu dziesiątki, potem z przekroczeniem jednej dziesiątki, odkrycie znaczenie skoku w górę i odejmowanie dowolnych liczb.

W wypadku dodawania liczb warto wprowadzić także przykłady, w których wyniki działań przekraczają wartość 100. Pokazujemy na kolejnym liczydło, że nie jest ono w stanie „liczyć” bez naszej pomocy, że nie liczy za nas, że zawsze musimy włożyć pewien wysiłek, aby uzyskać rezultat.

Ponieważ mnożenie liczb daje się przedstawić jako dodawanie, nasze liczydło może się przydać także podczas nauki tabliczki mnożenia. Innym zadaniem, zapowiedzianym wcześniej, jest zaznaczanie pionkami lub kolorami liczb będących wielokrotnościami danej liczby. Prosimy dzieci: „Zaznaczcie liczbę 3, a teraz zaznaczcie liczbę o 3 większą i jeszcze o trzy większą od zaznaczonej poprzednio. Postępujcie dalej w ten sposób, każda następna ma być o trzy większa od poprzedniej. Przyjrzyjcie się planszy. Co ciekawego zauważacie?”. Zaznaczone liczby będą układały się w ukośne rzędy. Jeśli ktoś pomylił się przy tym



zaznaczaniu, regularność wzoru zostaje zachwiana, a zatem zostanie też wskazane miejsce ewentualnego błędu. Dziecko będzie mogło sprawdzić i poprawić błąd.

Analogiczne ćwiczenia będą dotyczyły wielokrotnego dodawania innych liczb. Na początku warto używać liczb jednocyfrowych: regularności ukazują się wyraźniej. Przy tym ćwiczeniu dziecko odkrywa, że mnożenie liczb można zastąpić wielokrotnym dodawaniem, a właściwie odwrotnie: wielokrotne dodawanie liczb, na przykład $5 + 5 + 5 + 5$ (suma czterech piątek) to to samo co $4 \cdot 5$. Odkrycie to nie jest czysto formalne – wynika ono z doświadczeń i eksperymentów rachunkowych wykonanych samodzielnie przez ucznia. Dywanik opisany w tej części zeszytu jest narzędziem służącym do odkrywania także innych prawidłowości. Dzieci mogą dokonywać samodzielnie ważnych spostrzeżeń dotyczących własności działań.

Może być także użytecznym liczydłem, z którego można korzystać w bardziej złożonych sytuacjach niż wyłącznie obliczanie. Oto przykład.

Dodaj lub odejmij

Cele

- kształcenie umiejętności rachunkowych i sprawności w zakresie dodawania i odejmowania liczb dwucyfrowych.

Efekty

Uczeń:

- sprawnie dodaje lub odejmuje liczby oraz wybiera spośród danych składników te, których suma lub różnica równa jest zadanej.

Potrzebne materiały: zestaw złożony z planszy ze składnikami oraz plansza z wynikami dodawania i odejmowania tych składników, która może zawierać także liczbę niebędącą wynikiem żadnej operacji.

Niżej przedstawione są przykładowe plansze. Kolejne, w zależności od możliwości dzieci i naszych potrzeb, da się łatwo wygenerować za pomocą arkusza kalkulacyjnego. Warto też prosić dzieci o tworzenie tego typu zestawów do kolejnych zadań.

Składniki:

24	45	32	11	50
----	----	----	----	----



Wyniki

65	21	56	8
77	13	35	34
33	82	18	61
74	26	95	24

Zadania

1. Zadaniem dziecka jest wyznaczenie sum lub różnic podanych liczb i zaznaczenie ich na planszy pionkami lub przez pokolorowanie.
2. Dodatkowym zadaniem może być ograniczenie nałożone na pokolorowane pola, np. muszą się one stykać bokami albo łączyć się w chodniczek, który łączy przeciwległe brzegi planszy.
W tym ćwiczeniu uczeń może już zapisywać w zeszycie działania powiązane z poszczególnymi polami planszy. Odkrywa też, która liczba (jeśli taka jest) nie jest ani sumą, ani różnicą danych. Aby to sprawdzić, trzeba wykonać wiele rachunków. Zwróćmy przy tym uwagę, że w tego typu zadaniu rachunki schodzą na dalszy plan, jak w większości zadań tekstowych. Dlatego też warto prezentować uczniom dodatkowe pomoce, które ułatwiają same rachunki, pozwalają więcej wysiłku włożyć w ich planowanie oraz wyciąganie wniosków na podstawie obliczonych wyników.

Liczydła pozycyjne

Liczydło dziesiętkowe

Na zakończenie zagadnień dotyczących samodzielnie wykonywanych pomocy dydaktycznych ułatwiających wykonywanie działań, odkrywanie własności liczb i działań oraz rozumowanie potrzebne podczas rozwiązywania problemu wprowadźmy jeszcze jedno liczydło. Jego głównym celem jest pokazanie cechy naszego sposobu zapisywania liczb, czyli pozycyjności.

Cecha ta oznacza, że o wartości zapisanej liczby świadczy pozycja cyfry w zapisie. Chociaż liczba 5555 składa się z czterech piątek, cyfra pięć ma w niej różne znaczenia: oznacza 5 jedności, 5 dziesiątek (50), 5 setek (500) i 5 tysięcy (5000). Mówimy, że nasz system zapisu



liczb jest pozycyjny i dziesiętkowy, czyli dodatkowo, że dziesięć jednostek niższego rzędu oznacza jedną jednostkę kolejnego rzędu wyższego. Z tym własnościami liczb dzieci zapoznają się nie wprost. Poznają je stopniowo, przez doświadczenia, np. z klasycznym liczydłem, które jednak raczej trzeba nabyć w sklepie.

Każda z dziesiątek koralików oznacza jednostki rzędu liczby maksymalnie (w tym wypadku) pięciocyfrowej. Przesuwanie koralików za deseczkę pozwala tworzyć przedstawienia liczb bez pomocy cyfr. Ułatwia także zrozumienie zasady: zamiast dziesięciu koralików na jednym pręcie, układamy jeden koralik na sąsiednim pręcie z lewej strony. Jeśli nie dysponujemy tego rodzaju pomocą dydaktyczną, możemy skonstruować analogiczną. W tym celu drukujemy każdemu uczniowi planszę:

Ile tysięcy	Ile setek	Ile dziesiątek	Ile jednostki

oraz zestawy pionków, które uczeń będzie układał na dużych jej polach, dbając o to, by nie było więcej niż 9 pionków na jednym polu.

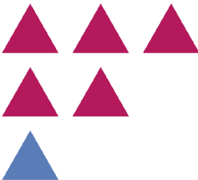
Plansza nie służy jedynie przedstawianiu liczb w systemie dziesiętkowym, ale też jest liczydłem, z którego można korzystać podczas dodawania i odejmowania liczb. Dostarcza ono uczniom cennych doświadczeń poprzedzających wprowadzenie tzw. działań pisemnych.

Zilustrujmy to prostym przykładem, który łatwo przetworzyć na sytuację edukacyjną. Na planszy ułożyliśmy dwie liczby trzycyfrowe. Każda jest przedstawiona w innym kolorze: 478 i 143.

Ile tysięcy	Ile setek	Ile dziesiątek	Ile jednostki



Aby otrzymać ich sumę, należy wykonać następujące czynności: zamieniamy dziesięć pionków z pola jednościci na jeden pionek z pola dziesiątek oraz zamieniamy dziesięć pionków z pola dziesiątek na jeden pionek z pola setek. Teraz możemy odczytać wynik dodawania dwóch liczb. „Kolory liczb” nie mają znaczenia przy tej operacji.

			
Ile tysięcy	Ile setek	Ile dziesiątek	Ile jednościci

Dzieci powinny odczytywać zarówno składniki, jak i wyniki dodawania, a także wyniki odejmowania. W wypadku odejmowania nie przedstawiamy na planszy odjemnika (liczby odejmowanej). Uczeń musi ją zachowywać w pamięci podczas obliczania. W wypadku, gdy na polu stoi mniej pionków, niż trzeba z niego zdjąć, należy „rozmienić” jeden pionek z pola z lewej strony na dziesięć pionków w rzędzie, w którym ich nam brakuje.

Przykładowo, odejmijmy od trzystu pięćdziesięciu jeden sto trzydzieści dwa ($351 - 132$):

			
Ile tysięcy	Ile setek	Ile dziesiątek	Ile jednościci

Ponieważ z pola jednościci nie możemy zdjąć dwóch pionków, zamieniamy jeden pionek z pola dziesiątek na dziesięć pionków, które układamy na polu jednościci. Teraz jest ich tam 11, a więc możemy zdjąć 2.



Ile tysięcy	Ile setek	Ile dziesiątek	Ile jednostki

Odczytujemy wynik odejmowania: 219.

Ile tysięcy	Ile setek	Ile dziesiątek	Ile jednostki

Zajęcia z łatwymi do wykonania planszami proponujemy uczniom klas II. Przeliczanie pionków podczas zamieniania jednostek bywa dla uczniów dość żmudne i często może prowadzić do błędów. W naturalny sposób dzieci chętnie porzucą tego typu „ułatwienie” na rzecz nieco może prostszych obliczeń pamięciowych lub obliczeń pamięciowych wspomaganych rachunkami wykonywanymi na papierze. Niemniej jednak ważne jest, żeby uczniowie w sposób manualny doświadczali reguły rządzącej dziesiętkowym pozycyjnym zapisem liczb i docenili łatwość w posługiwaniu się nim podczas dodawania i odejmowania.

W prostszy nieco sposób można uzmysłowić dzieciom cechę pozycyjności systemu, wprowadzając liczydło, z którego mogą korzystać podczas ćwiczeń w pamięciowym mnożeniu, dodawaniu i odejmowaniu oraz w grach, do zliczania punktów. Przykład takiej gry znajduje się w Zeszycie 2 tego zestawu.



Liczydło czwórkowe (edukacja wczesnoszkolna, klasa III)

Cele

- kształtowanie umiejętności pamięciowego dodawania, odejmowania oraz mnożenia liczb,
- zrozumienie znaczenia pozycyjności sposobu zapisywania liczb (w tym wypadku cztery jednostki jednego rzędu stanowią jednostkę najbliższego rzędu większego).

Efekty

Uczeń:

- przedstawia liczby za pomocą jedności, czwórek, szesnastek i sześćdziesiątek czwórek,
- korzysta z liczydeł do odejmowania i dodawania liczb, stosując reguły zamiany pionków na planszy.

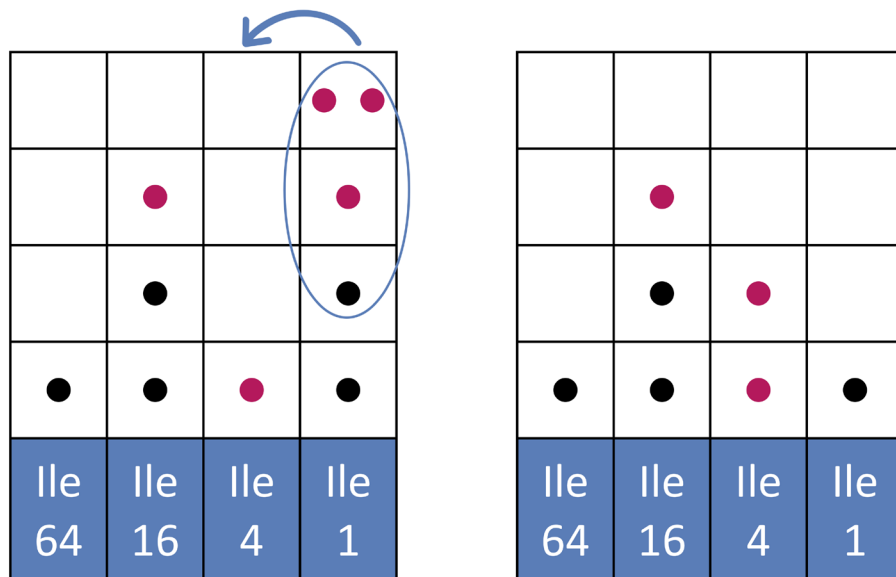
Potrzebne materiały: plansze i pionki.

Ile 64	Ile 16	Ile 4	Ile 1

- Nauczyciel wprowadza umowy dotyczące sposobu zaznaczania liczb w tabeli. Korzysta z większej planszy umieszczonej na tablicy. Dzieci manipulują na swoich planszach, czasem naśladując nauczycielkę, częściej wyprzedzając jego czynności. „Zamiast używać 64 pionków do przedstawienia liczby 64 – to byłoby dużo liczenia, prawda? – wystarczy użyć jednego. Jak myślicie, gdzie go położymy?”. Dzieci wskazują właściwe pole.
- Kolejne zadania polegają na przedstawianiu innych liczb lub odczytywaniu zaznaczonych na planszy. Nauczyciel zadaje pytania także w taki sposób: „Jaka liczba składa się z dwóch sześćdziesiątek czwórek, jednej szesnastki, trzech czwórek i jedynek?”. Chociaż dzieci operują przedstawieniami w systemie czwórkowy, tak naprawdę liczą i operują na liczbach w systemie dziesiętkowym.



3. Na tym liczydłe można też dodawać i odejmować liczby. Rachunki na nim są uproszczone w porównaniu z liczydłem dziesiętkowym, opisanym wcześniej. Zamienia się nie dziesięć pionków na jeden, tylko cztery na jeden, zarówno podczas dodawania z przekroczeniem progu, jak i podczas odejmowania. Próg jednak nie jest równy 10, jak poprzednio, tylko 4.



$$98 + 23 = 121$$

Podobne ćwiczenia mogą dotyczyć odejmowania liczb. Zaczynamy od ćwiczeń na liczbach mniejszych od 50.

Po zajęciach liczydła trafiają do indywidualnych pudełek, jak większość pomocy dydaktycznych używanych na lekcjach, a liczydła powiększone – na tablicę, na której można używać magnesów do przedstawiania liczb i wykonywania na nich działań.

Zestawy pomocy do nauki mnożenia

Znajomość wyników działań na pamięć w proponowanej metodyce rachunków wydaje się nie tyle celem samym w sobie, ile celem osiągniętym przy okazji wykonywania podstawowych działań. Dodając do siebie i odejmując liczby za pomocą liczbowych chodniczków i dywaników, dzieci z czasem zapamiętują wyniki najprostszych działań (np. $8+7$) i nie muszą ich wykonywać za każdym razem, kiedy są im potrzebne wyniki. Podobnie powinno być z wynikami mnożenia. Często jednak tak nie jest i musimy odwoływać się do bezpośrednich ćwiczeń ułatwiających zapamiętywanie tych wyników lub wręcz do podręcznej tabliczki mnożenia, z której uczeń może odczytać wynik.

Na wczesnych etapach nauki, kiedy staramy się poprowadzić ucznia do odkrycia związku między wielokrotnym dodawaniem do siebie tego samego składnika a odpowiednim



mnożeniem, wygodną pomocą jest dywanik liczbowy. Można z niego odczytywać (wcześniej wykonując odpowiednie czynności) dowolny iloczyn w zakresie do 100, nie tylko iloczyn liczb jednocyfrowych. Klasyczna tabliczka mnożenia obejmuje tylko iloczyny liczb jednocyfrowych.

Mnożenie do stu

Cele

- odkrywanie regularności w rozmieszczeniu wielokrotności liczb na planszy do 100,
- kształcenie pojęcia wspólnej wielokrotności,
- mnożenie liczb naturalnych jako znajdowanie ich wielokrotności.

Efekty

Uczeń:

- wskazuje wielokrotności liczb oraz opisuje rozmieszczenie wielokrotności w tabeli,
- wykonuje mnożenie liczb typu 6 razy 13 w pamięci lub za pomocą liczydła planszowego.

Potrzebne materiały: kilka dywaników liczbowych dla każdego ucznia, kredki w różnych kolorach.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1. Nauczyciel prosi uczniów o pokolorowanie pola z liczbą dwa, a potem z liczbą o dwa większą i tak dalej do końca dywanika albo do liczby mniejszej niż 100, np. do 30. Każdy



uczeń zaznaczył wielokrotności dwójki, a więc wyniki mnożenia dwójki przez 2, 3, 4, 5 itd. Ten dywanik nie nadaje się już do wykorzystania, więc możemy sięgnąć po następny.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2. Teraz uczeń zaznacza liczbę 3 i liczby kolejno o 3 większe niż poprzednia.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



3. Podobnie można postępować dalej, czyli uczniowie zaznaczają wielokrotności czwórki, piątki... Każdy pokolorowany dywanik zawiera przede wszystkim informacje: jaką liczbę mnożymy (to pierwsza zaznaczona liczba) oraz jaki jest wynik działania (to każda z zaznaczonych liczb). Nie możemy jednak od razu się dowiedzieć, przez którą liczbę mnożymy. W tym celu musimy policzyć, którą liczbą w kolejności jest wynik. Przykładowo, trójka jest pierwszą liczbą, więc jest to wynik mnożenia przez 1, 6 jest drugą, więc jest iloczynem 3 i 2 itd.

Nauczyciela może więc pytać dalej: „Przez którą liczbę trzeba pomnożyć 3, żeby otrzymać 39?”. Podobne pytania trzeba zadawać, używając dzielenia: „Przez którą liczbę trzeba podzielić 57, żeby otrzymać 3?”.

W takim kontekście warto ćwiczyć na dywaniku wyniki umieszczone w klasycznej tabliczce mnożenia.

Do innych ciekawych wniosków można dojść, zaznaczając wielokrotności dwóch liczb. Na planszy poniżej widzimy wielokrotności liczby 5 i 6. Uczniowie z pewnością wyciągną wnioski dotyczące takich tabel.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Oba układy tworzą regularny wzór. W pewnych polach wzory się spotykają. Te liczby to wspólne wielokrotności. Warto zapytać: „Która z nich jest najmniejsza? Jaka będzie kolejna wspólna wielokrotność po 90”. Aż się prosi poszukać wspólnych wielokrotności innych par i innych trójek liczb, zanim dzieci w starszych klasach zostaną zapoznane z formalnymi algorytmami.



Dziecięca geometria

Wielu nauczycielom edukacji wczesnoszkolnej wydaje się, że tematy dotyczące rachunków i zapisów działań są znacznie ważniejsze niż tematy dotyczące figur i ich własności. Być może przyczyna tego całkowicie błędnego przekonania leży w trudnościach związanych z przygotowaniem pomocy dydaktycznych lub sporządzaniem notatek w zeszytach. Dzieci nie są dostatecznie sprawne manualnie, aby w krótkim czasie starannie i bezbłędnie narysować w zeszycie kwadrat lub prostokąt. Może się też wydawać, że w dalszej szkolnej karierze ucznia większy nacisk będzie położony na umiejętności rachunkowe, które są przecież potrzebne także w zadaniach geometrycznych. Z badań i praktyki szkolnej wynika jednak niezbiecie, że umiejętności przypisywane zajęciom z geometrii są tak samo ważne jak inne umiejętności matematyczne. Tu także uczeń ma okazję do prowadzenia rozumowania matematycznego, eksperymentowania i wyciągania wniosków.

Tak samo jak w arytmetyce odpowiednio dobrane zajęcia sprzyjają takiemu eksperymentowaniu, stawianiu hipotez, sprawdzaniu ich itp. Samodzielnie wykonane, dobrze dostosowane do celów zajęć, estetyczne pomoce dydaktyczne zachęcają dzieci do zabawy, układania i rozwiązywania zadań. Kształtują też wyobraźnię przestrzenną i pomagają w rozwoju operacyjnego rozumowania na poziomie konkretnym. Dzięki manipulowaniu figurami dziecko dostrzega na przykład możliwość odwracania operacji, która jest podstawową cechą nie tylko matematyki, ale też abstrakcyjnego rozumowania.

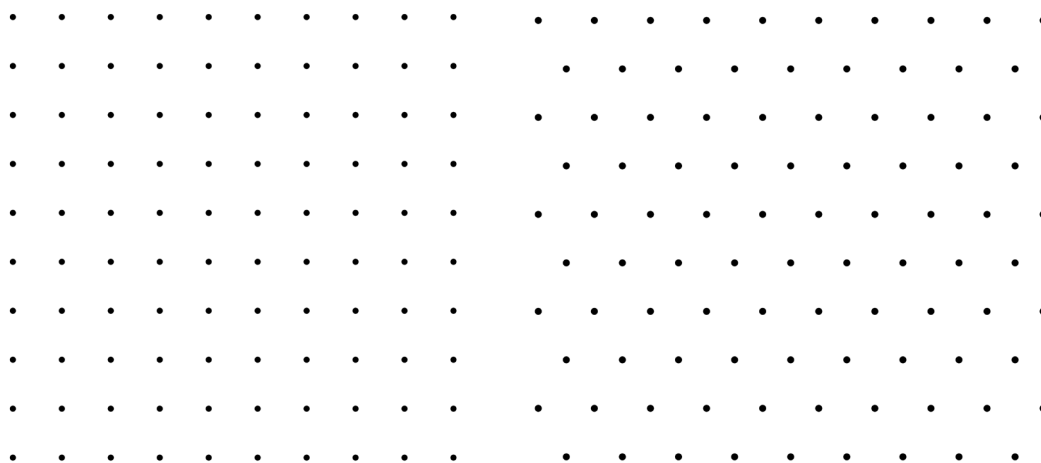
Nie zaniedbujemy zatem zajęć geometrycznych i nie sprowadzamy ich wyłącznie do nauki nazywania i rozpoznawania figur w otoczeniu dziecka. W naszych ćwiczeniach będziemy zachęcać uczniów do manipulacji modelami figur, do ich przekształcania na różne sposoby.

Wymagania podstawy programowej dla edukacji wczesnoszkolnej, będące kontynuacją wymagań dla uczniów edukacji przedszkolnej w zakresie geometrii, czyli działu matematyki poświęconemu figurom płaskim i przestrzennym oraz ich własnościom i wzajemnym związkom, sprowadzają się do następujących:

1. Uczeń powinien rozpoznawać i nazywać koła i prostokąty, odróżniać kwadraty od prostokątów, trójkąty, odcinki i łamane. Umieć rysować te figury (oprócz kół) za pomocą linijki lub na papierze z zaznaczoną siecią kwadratową. Powinien rozpoznawać te figury w swoim otoczeniu. Mierzyć ich obwody w sytuacjach życiowych. Dostrzegać równoległość lub prostopadłość odcinków.
2. Powinien się też dobrze orientować w stosunkach przestrzennych względem własnego ciała i innych obiektów oraz w konwencjach określających podstawowe kierunki: lewo, prawo, przód, tył, góra, dół (strony, ekranu).
3. Powinien dostrzegać symetrie figur, ich podobieństwa oraz różnice wielkościowe. Chcemy, by uczeń umiał podzielić kartkę lub inny płaski przedmiot na pół i cztery części równe (por. Rozporządzenie..., 2017: 38).



Każde z tych zagadnień w naturalny sposób odsyła do konkretnych przedmiotów, pomocy dydaktycznych, które możemy łatwo znaleźć w każdym domu lub też tanio zakupić. Niezbędne będą, jak poprzednio, papier, linijka, nożyce, klej, papier z nadrukiem sieci kwadratowej (linie krótkie lub kropki w wierzchołkach krótkich) oraz trójkątnej (linie tworzą trójkąty równoboczne albo kropki są wierzchołkami trójkątów równobocznych) przedstawione poniżej.



Przygotowanie pomocy dydaktycznych związanych z nauczaniem geometrii sprowadza się zatem przede wszystkim do wycinania z papieru figur geometrycznych. Należy więc zawsze mieć w pogotowiu duże zbiory jednakowych kwadracików (4 cm x 4 cm), z których dzieci będą układały figury, a następnie mierzyły ich obwody, porównywały, przerysowywały na sieci kwadratowej i opisywały własności. Warto mieć także przygotowane wcześniej kwadraty z podziałem na figury do prostych układanek typu tangram, jak te na przykładowych schematach.



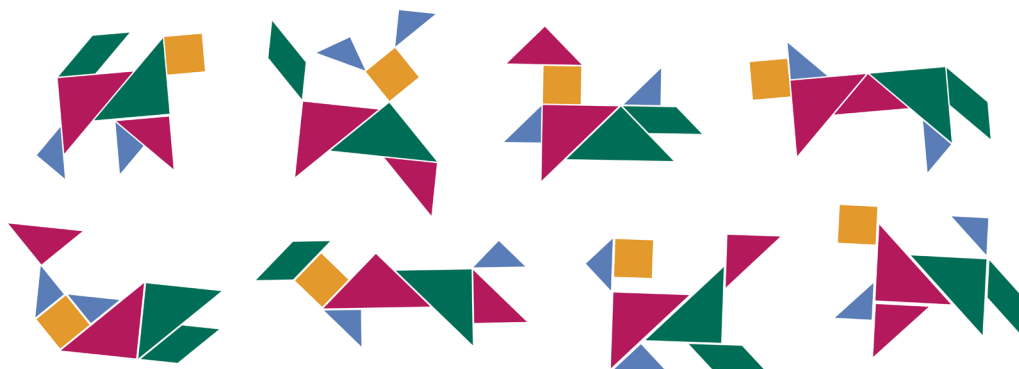
Układanki te warto rozbudowywać do Tangramu, gry-zabawki, którą dzieci mogą znać z internetu lub mieć wśród domowych zabawek.



Do tych pomocy – układanek – stosujemy następujące rodzaje poleceń/pytań:

1. Manualne:

- Ułóż figurę, którą miałeś na początku lub figurę zadaną na obrazku (na przykład kwadrat, dom, postać).



- Przerysuj ułożoną figurę na papier w kropki lub w kratkę.
- Pomaluj układankę, każdą figurę innym kolorem albo tak, żeby sąsiadujące figury nie miały tego samego koloru.
- Ułóż kwadrat, używając dwóch (trzech, czterech) wybranych kawałków układanki.
- Zaprojektuj własną figurę ze wszystkich elementów układanki i nazwij ją. (Warto, żeby ułożone przez dzieci figury były przyklejane na większe kartki – w ten sposób tworzymy estetyczne prace plastyczne).

2. Opisowe:

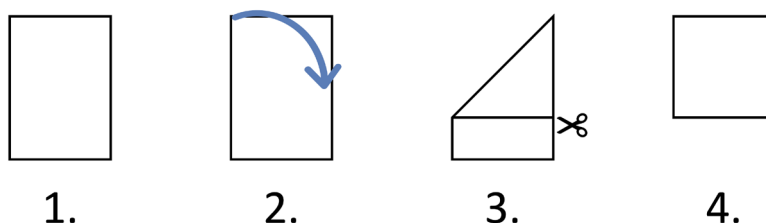
- Z ilu figur składa się twoja układanka.
- Jak nazywają się figury, których użyłeś?
- Które z nich są jednakowe, a które są prawie takie same, tylko różnią się wielkością?
- Ile boków ma figura, którą ułożyłeś? (To pytanie może wykraczać poza wymagania podstawy programowej).



Omówmy teraz przykładowe zajęcia, które można dostosować do możliwości każdej grupy. Najlepszym sposobem na wykształcenie pojęć geometrycznych są eksperymenty z figurami: układanie figur, modyfikowanie, mierzenie.

Najprostszym i bardzo ważnym zadaniem konstrukcyjnym jest zadanie polegające na uzyskaniu kartki w kształcie kwadratu z kartki w kształcie dowolnego prostokąta (np. formatu A4). Kwadratowe kartki są często potrzebne do tworzenia zabawek typu origami, w których konstrukcje geometryczne przebiegają techniką zginania papieru. Zginając i rozprostowując papier, dzieci widzą efekty swoich czynności – figury geometryczne, wielokąty, które mogą przy tym nazywać i opisywać. Nauczyciel może przy tej okazji przemyślać ważne pojęcia z geometrii, takie jak: bok figury, odcinek, przekątna kwadratu, wierzchołek figury, kąt prosty, prostokąt, równoległość boków.

Aby skonstruować kwadrat z prostokątnej kartki należy zgiąć kartkę tak, aby krótsza jej krawędź ułożyła się na dłuższej.



Uwaga techniczna: Zamiast nożyczek warto stosować tanie i bezpieczne w użyciu, precyzyjne przecinaki do papieru, którymi przeciąga się wzdłuż zgiętej krawędzi kartki.

Origami

Literatura poświęcona japońskiej sztuce składania papieru jest bardzo obszerna i łatwo dostępna. Każdy nauczyciel bez trudu wybierze prosty model z papieru, którego dzieci chętnie się nauczą. Także w internecie można znaleźć filmy instruktażowe na temat, jak zrobić figurkę lub przedmiot tą techniką.

Warto wyświetlać takie filmy i razem z instruktorem wykonywać konieczne czynności. Nasi uczniowie widzą wtedy, że ich nauczyciel nie zawsze jest tym, który już wszystko wie i potrafi, ale sam także się uczy. Ucząc się razem z dziećmi, możemy dawać im przewagę, żeby robiły coś szybciej od nas i lepiej. Taka lekcja może zachęcić niektórych naszych podopiecznych do intensywniejszej nauki.

Jeżeli w toku konstrukcji pojawią się figury, których nazw dzieci nie muszą opanować, np. trapez, równoległobok, romb, pięciokąt i in., możemy, rozmawiając o nich, zadawać pytania typu: „Czy to jest kwadrat? A dlaczego? A może to jest prostokąt? Nie, a dlaczego?”. Dzieci, wyjaśniając nam swój pogląd, będą powoływać się na cechy figur podstawowych.



Warto też zapoznać uczniów z origami modułowym, które umożliwia rozwój przestrzennego myślenia i konstruowania kształtów przestrzennych. W przeciwieństwie do tradycyjnego origami, w którym figurki powstają z jednej kartki papieru, modułowe modele, np. bryły geometryczne lub figurki zwierząt, zbudowane są z wielu, zwykle identycznych modułów. Takie pojedyncze moduły są łączone w całość, tworząc bardziej skomplikowaną figurę. Więcej o tworzeniu origami modułowego można dowiedzieć się m.in. na stronach [Wrocławskiego Portalu Matematycznego](#).



Kołowa układanka

Uwaga techniczna: Z wycinaniem dużej liczby kół potrzebnych do zajęć mogą być problemy. Trzeba zatem kupić odpowiedni przyrząd do ich wycinania. Nie jest drogi i będziemy zadowoleni z zakupu.





To ćwiczenie stosujemy zawsze, gdy chcemy wprowadzać pojęcie dowolnej figury, a zatem nie tylko koła, również kwadratu lub trójkąta (najlepiej równobocznego).

Cele

- kształtowanie pojęcia koła,
- rozwijanie umiejętności psychomotorycznych.

Efekty

Uczeń:

- układa koło z kawałków papieru.

Potrzebne materiały: duża liczba kół wyciętych z papieru bez desenia, jednokolorowego.

Przebieg zajęć

1. Nauczyciel rozdaje każdemu uczniowi po jednym kole wyciętym z papieru i mówi: „Obejrzyjcie sobie koło. Tak wygląda. Weźcie do ręki nożyce i przetnijcie teraz koło na dwie części wzdłuż prostej linii, o tak”. Wykonuje proste cięcie kartki w kształcie koła. Uczniowie powtarzają tę czynność.
2. Nauczyciel: „Przecieliście kartkę jeden raz. Ile części otrzymaliście? Czy umiecie ułożyć koło z tych kawałków? Spróbujcie”. Dzieci bez większego trudu układają koło. „Teraz weźcie jeden z kawałków i przetnijcie go na dwie części, tak jak poprzednio, tnąc prostym cięciem, wzdłuż odcinka”. Dzieci wykonują tę czynność. Niektóre od razu próbują ułożyć koło z trzech kawałków.
3. W ten sposób dzieci uzyskują coraz więcej kawałków i coraz trudniej jest im ułożyć zadaną figurę. Niektóre się zniechęcają, inne uparcie dążą do celu. Zajęcia należy przerwać, gdy więcej uczniów zrezygnowało już z układania. Pytamy wtedy: „Z ilu kawałków umiecie ułożyć koło? Kto miał najwięcej?”.
4. Proponujemy uczniom pocięcie koła na pięć kawałków i wklejenie do zeszytu z nich ułożonego koła. Wycinankę podpisujemy. Zajęcia w naturalny sposób prowadzą do gry dwuosobowej. Gracze na zmianę tną jedno koło na coraz większą liczbę części: gracz, który przecina kawałek koła, oddaje wszystkie kawałki drugiemu. Jeżeli rywal nie ułoży koła w odpowiednio krótkim czasie, wygrywa.

Komentarz: Zdjęcia z kolorowych czasopism mogą zostać użyte do produkcji układanek typu puzzle. Tę pomoc dydaktyczną wykonujemy w następujący sposób: Wybieramy zdjęcie lub pocztówkę, skanujemy ją w formacie odpowiadającym wielkością kopercie, w której będziemy przechowywać układankę. Tniemy zdjęcie na kilka kawałków i wkładamy je do koperty, na którą naklejamy wydrukowaną miniaturę pocztówki. Zadaniem ucznia będzie



ułożyć pocztówkę na podstawie jej czarno-białej albo kolorowej kopii. Zabawa w układanie pocztówki może urozmaicić dziecku czas wolny podczas przerwy albo zajęcia świetlicowe.

Ważymy i porównujemy

Spośród przedmiotów codziennego użytku, które znajdują ważne miejsce w naszych zasobach pomocy dydaktycznych, na uwagę zasługuje wieszak do ubrań. Każdy wieszak nadaje się do wykonania prostej wagi do porównywania masy różnych przedmiotów. Porównywanie takie niezbędne jest do wykształcenia pojęć matematycznych takich jak relacja mniejszości–większości, a na późniejszych etapach równanie lub nierówność. Dzięki wadze uczniowie mogą odkryć ważne własności dodawania i odejmowania, np.

- Jeśli na jedną i drugą szalkę wagi włożymy taki sam ciężar, to położenie ramion wagi się nie zmieni.
- Jeśli z obu szalek wagi zdejmimy taki sam ciężar, to położenie ramion wagi również się nie zmieni.

Oba prawa są bardzo użyteczne podczas pamięciowych obliczeń na liczbach co najmniej dwucyfrowych.

Porównywanie ciężarów

Sytuacja dydaktyczna

Cele

- kształcenie umiejętności porównywania wagi przedmiotów na podstawie doświadczeń z wagą szalkową,
- kształcenie aspektu miarowego liczby.

Efekty

Uczeń:

- przewiduje zmianę położenia szalek wagi na podstawie wiedzy o ciężarze przedmiotów,
- porównuje ciężary dwóch przedmiotów korzystając z wagi szalkowej lub wagi z wieszaka działającej na tej samej zasadzie,
- ustawia kilka przedmiotów w kolejności od najlżejszego do najcięższego na podstawie ważeń dwóch przedmiotów,
- potrafi wyrazić ciężar przedmiotu za pomocą ciężarów kilku jednakowych przedmiotów pełniących rolę odważników.



Potrzebne materiały: waga po jednej dla każdej grupy, zbiór przedmiotów do ważenia (małe zabawki, owoce, cukierki), sześciennie klocki jednakowych rozmiarów, które będą pełniły rolę odważników.

1. Nauczyciel wybiera dwoje dzieci. Wręcza jednemu z nich dwa przedmioty i mówi: „Jak myślisz, który z przedmiotów waży więcej? Który z nich jest cięższy?”. Uczeń zazwyczaj udziela odpowiedzi i jest to odpowiedź poprawna, jeżeli różnica ciężarów jest wyraźnie odczuwalna w dłoniach. Tak jest w tym wypadku. Daje przedmioty drugiemu uczniowi i pyta go: „A ty, jak uważasz?”. Jeżeli odpowiedzi obu uczniów są zgodne, nauczyciel kontynuuje rozmowę w kierunku: „Jak myślicie, jak przekonać innych, że tak jest rzeczywiście?”. Uczniowie proponują porównanie ciężaru za pomocą umieszczonej w widocznym miejscu wagi z wieszaka.
2. Zanim przystąpimy do porównania, mówimy: „Co się stanie z wagą, jeżeli na tej szalce położymy lżejszy przedmiot, a na drugiej cięższy? W którą stronę pochyli się wieszak?”. Odpowiedź na to pytanie nie jest wcale oczywista. Dość często nawet dzieci z klasy IV udzielają błędnej odpowiedzi. Przed ważeniem warto ustalić z dziećmi, jakiego rezultatu oczekujemy, żeby potwierdzić zdanie uczniów. Niewielu z nich miało wcześniej doświadczenia z wagami szalkowymi, większość wag to wagi elektroniczne. Dlatego muszą oni dobrze przećwiczyć zasady działania wagi szalkowej.
3. Wybrani uczniowie porównują ciężary przedmiotów za pomocą przyrządu. Wyciągają wnioski, czy ich przewidywania były trafne, czy też nie.
4. Zajęcia prowadzone są teraz metoda pracy w grupach. Dzieci decydują same, które przedmioty porównają, wybierają po dwa, próbują określić, który jest cięższy, ważąc je w dłoniach, a następnie sprawdzają, czy właściwie odgadły, ważąc je na wadze. Wyniki swoich eksperymentów zapisują w tabelkach lub w innej formie. Cztery przedmioty można połączyć w pary i porównać na sześć sposobów, pięć na dziesięć, co w zupełności wystarczy. Dodatkowym, trudnym zadaniem będzie ustawienie przedmiotów w kolejności od najlżejszego do najcięższego. Zadanie to daje duże pole do burzliwych dyskusji i krytycznego rozumowania, a także do dodatkowych testów.
5. Kolejnym etapem zajęć powinno być dołączenie do zestawów odważników, najlepiej klocków o jednakowym ciężarze dostosowanym do ważonych obiektów. Uczniowie będą mogli doświadczyć, że dużo łatwiej jest ustawić ważne przedmioty w kolejności od najlżejszego do najcięższego, jeśli znamy ich ciężar wyrażony w jednostce „klocek”.

Tego typu zajęcia, jak wiele wcześniej opisanych, przybierają charakter minibadań naukowych. Dzieci konstruuja problemy, stawiają hipotezy, testują je, potwierdzają lub obalają, wyciągają wnioski. Takie rozumowanie powinno być kształtowane i rozwijane od jak najwcześniejszych etapów rozwoju. Nie spodziewamy się, że wszyscy nasi uczniowie zostaną w przyszłości naukowcami. Chcemy, żeby każdy z nich radził sobie w rozmaitych sytuacjach zadaniowych nie tylko na lekcjach czy egzaminach, ale też w życiu codziennym.



Korzystając z wieszaka do przeprowadzenia porównań, należy przed każdym ważeniem zwracać uwagę na równe położenie ramienia. Zmiana jego położenia świadczy o nierówności ciężarów obiektów umieszczonych na szalkach. Brak zmiany – o równości ciężarów.

Ze starszymi dziećmi można przy tej okazji zastanowić się nad takim problemem:

1. Ile porównań trzeba wykonać, żeby stwierdzić, który z dwóch dowolnych przedmiotów jest cięższy, jeżeli mamy do porównania 6 przedmiotów, a ile, gdy 7? Na to pytanie uczniowie odpowiedzą na drodze eksperymentu na konkretach lub sporządzając odpowiedni rysunek.
2. Ile porównań wystarczyłoby wykonać, żeby ustawić w kolejności od najlżejszego do najcięższego 2 przedmioty, 3 przedmioty, 4 przedmioty, 5 przedmiotów? Odpowiadając na to pytanie, dzieci będą używać wnioskowania przyczynowo-skutkowego opartego na schemacie: jeżeli A jest lżejsze od B, a B jest lżejsze od C, to A jest lżejsze od C, więc nie musimy ważyć A i C.

Temat ten otwiera kolejne związane z pomiarami. Do każdego pomiaru potrzebujemy odpowiedniego narzędzia. Istotą każdego pomiaru, która ukazana jest w każdym narzędziu, jest to, że wielkości określonego rodzaju wypełniamy wielkościami tego samego rodzaju w taki sposób, że jednostki miary (wypełniania) mają tę samą miarę i wypełniając wielkość, nie nakładają się na siebie i nie pozostawiają między sobą pustych przestrzeni. Mogliśmy się temu przyrzeć w zajęciach o ważeniu, wyraźniej jednak widać tę cechę w zajęciach związanych z pomiarami długości.

Dlaczego warto razem z dziećmi skonstruować linijkę?

Odpowiedzi na podobne pytania udzielaliśmy już wielokrotnie: jeżeli dziecko bierze udział w konstruowaniu czegokolwiek (czy to na konkretach, czy wyłącznie w wyobraźni) znacznie lepiej rozumie ono i zapamiętuje zasadę działania swojej konstrukcji oraz wie, w jakich sytuacjach może się mu przydać. Jeżeli otrzymuje dane narzędzie w gotowej postaci wraz z instrukcją z zewnątrz (od dorosłego lub kolegi), jego wiedza jest niestabilna i mało użyteczna, zawiera liczne błędy, z trudem łączy się z nową wiedzą oraz łatwo ulega zapomnieniu.

Dlatego zależy nam na respektowaniu podstawowej zasady nauczania: jak najmniej wiedzy w gotowej postaci, jak najwięcej uczenia się na podstawie osobistych doświadczeń ucznia. Nawet jeżeli czasem uczenie się trwa dłużej i nie wydaje się przynosić szybkich pożądanych efektów.

Zestaw naszych pomocy dydaktycznych wykonanych samodzielnie powiększymy o linijkę do pomiarów długości. Zanim wprowadzimy zwykłą linijkę wraz z instrukcją jej używania, która przez wielu uczniów będzie na wiele sposobów błędnie interpretowana, zanim przyłożymy



metr krawiecki do krawędzi ławki lub tablicy, pozwólmy dzieciom mierzyć odległości w naturalny sposób:

- za pomocą kroków – równych, miarowych, rytmicznych przejść z jednego punktu do drugiego, połączonych z głośnym liczeniem od 1 do ostatniego kroku trafiającego w punkt końcowy;
- za pomocą stóp ciasno dostawianych jedna do drugiej pomiędzy punktami na wyznaczonych trasach, wzdłuż odcinka lub łamanej lub swobodnej linii narysowanej kredą na podłodze.

Wyniki tych pomiarów pozwalają zrozumieć, że:

- ich wynik zależy od jednostki,
- można stosować różne jednostki podczas pomiarów tej samej wielkości, ale jednostki te muszą być do siebie podobne (zegarkiem jednak nie da się zmierzyć odległości między obiektami w przestrzeni),
- jednostki, którymi mierzymy, muszą być w pomiarze jednakowe i ciasno wypełniać mierzone obiekty.

To jest bardzo złożona teoretyczna wiedza, o którą ucznia nie pytamy, ale którą sami musimy mieć na uwadze, by nie przegapić w trakcie zajęć żadnego z aspektów pomiaru.

Aby skonstruować najprostszą linijkę, musimy przygotować cienką, sztywną listewkę, prosty patyczek lub inny wąski obiekt długości około 30–40 cm, a nawet dłuższe, oraz krótkie patyczki jednakowej długości, np. zapalki bez łebków pokrytych siarką lub kolorowe patyczki-liczmany.

Rozpoczynamy od zadań polegających na mierzeniu krótkich odległości wzdłuż odcinków, np. długości i szerokości podręcznika, zeszytu lub ławki. Potem utrudniamy zadanie, ale tylko technicznie, prosząc o mierzenie dłuższych odcinków takich jak długość tablicy, klasy, korytarza. Zadanie jest wykonalne w niezbyt długim czasie, jeżeli skorzystamy z metody pracy w grupach. Niektórych uczniów może ono zniechęcić, innych natchnąć do odkryć. Skoro mamy zmierzyć długość korytarza szkolnego patyczkami, to może przyklejmy te patyczki, ile się zmieści do listewki, a następnie zmierzmy korytarz tymi listewkami. Kilkanaście mniejszych jednostek stworzy jedną większą i oto nam właśnie chodzi. Na tak skonstruowanej linijce piszemy, ile jednostek udało nam się równo przykleić lub piszemy odpowiednie liczby na końcu każdej z nich.

Po takim ćwiczeniu dzieciom będzie trudno popełnić dość rozpowszechniony błąd polegający na niewłaściwym odczycie pomiaru długości odcinka, do którego przyłożono linijkę nie od jej początku (od zera), tylko od innej wartości.

Dobrym wstępem do wprowadzenia na kolejnym etapie edukacyjnym pojęcia pola figury jest układanie różnych figur z identycznych kwadratów lub identycznych trójkątów równobocznych. Obie figury mają tę własność, że można nimi wypełnić ciasno i bez



nakładania całą płaszczyznę. Po ćwiczeniu w układaniu figur z kwadratów i trójkątów osobno, można poukładać figury z obu tych figur jednocześnie. Zestaw jednakowych wielokątów o tej własności możemy traktować jako przyrząd do pomiaru pola figury płaskiej.

Naturalnym rozszerzeniem techniki pomiaru figur płaskich są zadania dotyczące pomiaru figur przestrzennych, stąd tak cenne są zadania związane z sześciennymi klockami. Niestety, w tym zeszycie musimy je pominąć, ponieważ trudno jest wyprodukować dużą liczbę sześcienników o tych samych rozmiarach. Z podobnych powodów zrezygnujemy w tym miejscu z omawiania geoplanu, jednak do tej drugiej pomocy dydaktycznej nawiążemy przy omawianiu zastosowania technologii informacyjno-komunikacyjnej, czyli w Zeszycie 3.

W podobny sposób możemy konstruować własne, podręczne, niestandardowe przyrządy do pomiarów różnych wielkości nieciągłych. Ich zestawienie znajduje się w tabeli poniżej.

Tab. 1. Zestawienie przyrządów do pomiarów różnych wielkości nieciągłych

Lp.	Wielkość mierzona	Czym mierzymy – przyrząd	Jednostka
1.	ciężar obiektu	waga z wieszaka	klocek, kuleczka
2.	długość drogi, odległość	linijka z listewki	patyczek, liman, zapalka
3.	czas, długość trwania procesu	płonąca świeca	patyczek, liman, zapalka odległość między dwiema kreseczkami zaznaczonymi na świecy
		człowiek wydający rytmiczne dźwięki	fragment miarowego wierszyka
		kalendarz – samodzielnie wykonany, w którym można zamieszczać uwagi dotyczące stanu pogody	dni tygodnia, tygodnie
4.	pole figury płaskiej dwuwymiarowej	zbiór jednakowych kwadracików	kwadracik
5.	temperatura	plastikowa butelka z wodą zabarwioną atramentem z korkiem, w który wbity jest cienka rurka z podziałką tak, że część wody jest także w rurce	odległość między dwiema kreseczkami na podziałce



Pomoce dydaktyczne do dziecięcej klasyfikacji

Ważną pomocą dydaktyczną są łatwe do wykonania karty do klasyfikacji. Zestaw takich kart powinien być możliwie duży i obejmować około 50 sztuk. Z czasem można zastępować jedne karty innymi w zależności od potrzeb.

Klasyfikowanie na poziomie operacji konkretnych:

- segregowanie na wiele sposobów według wyróżnionej cechy – **giętkość rozumowania**;
 - » wielkość: duże, małe,
 - » grubość: szerokie, wąskie,
 - » pojemność: głębokie, płytkie,
 - » waga: ciężkie, lekkie,
 - » kolor: białe, żółte, zielone, niebieskie, czerwone,
 - » liczba wierzchołków: 3-wierzchołkowe, 4-wierzchołkowe, 5-wierzchołkowe, 6-wierzchołkowe,
 - » kształt: kwadratowe, okrągłe, prostokątne, trójkątne, kuliste, sześciennie, walcowate, stożkowe,

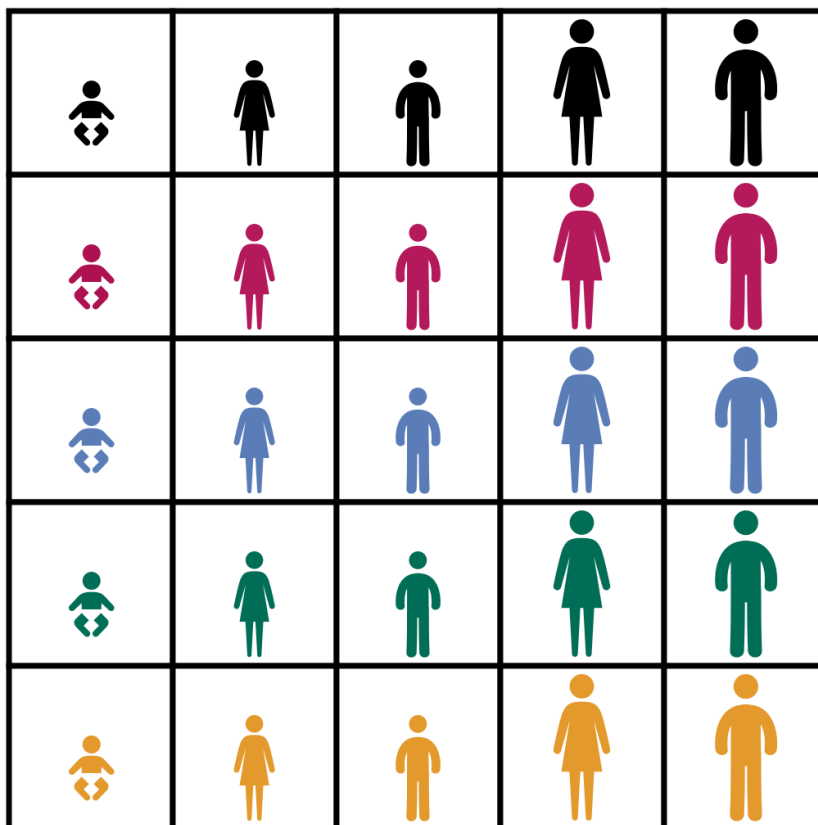
Utrwalanie nabytych umiejętności poprzez dokańczanie zdań:

Lekki jak..., Ciężki jak..., Kwadratowy jak..., Czerwony jak...

- segregowanie według cechy przewodniej – **konsekwencja**;
- charakteryzowanie przedmiotu (opis definicja) z uwzględnieniem cech segregowania – **dokładność definiowania**.
 - » kwadratowe, granatowe – 
 - » duży, brązowy, wąski – pień.



Przykładowe elementy do klasyfikowania z dziećmi na poziomie operacyjnym:



Na kartach – prostokątach jednakowej wielkości, np. zwykłych kart do gry lub nieco większych, dzieci wspólnie z nauczycielem lub rodzicami przyklejają obrazki pojedynczych przedmiotów wycięte z kolorowych czasopism lub folderów reklamowych. Przedstawiają zatem meble, warzywa, owoce, potrawy, sprzęt AGD, naczynia, wyposażenie sypialni, samochody, zabawki, ubrania itp. Jednakowa wielkość kart umożliwia ich wymianę w ramach klasowej społeczności. Dzieci mogą ustalać przy tych wymianach swoje kryteria i argumentować, dlaczego taka akurat karta pasuje do już posiadanych. Przykładowo, ktoś ma mało kart z warzywami i nie ma jeszcze pomidora, więc może się wymienić z kimś na kartę z telewizorem, bo ma już dwie podobne.

Zestaw własnych kart do klasyfikacji jest ważnym składnikiem osobistego zestawu pomocy do edukacji matematycznej. Niezależnie od wykonania własnych kart do klasyfikacji warto zaopatrzyć się karty profesjonalne.



Dowiedz się więcej

1. W ramach projektu Global Math Project powstał serwis [Wybuchające Kropki](#) (Exploding Dots). To bardzo ciekawa inicjatywa, która przedstawia wiele niekonwencjonalnych sposobów wyjaśniania zagadnień matematycznych od poziomu przedszkola do uczelni wyższych.
2. Gruszczyk-Kolczyńska E., Skura M., *Skarbiec matematyczny. Zestaw pomocy przydatnych w edukacji matematycznej dzieci z poradnikiem metodycznym (klasa 0 i klasy I–III)*, Wydawnictwo: NOWA ERA.

Bibliografia

Bruner J.S., (1978), *Poza dostarczone informacje. Studia z psychologii poznawania*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E., (2009), [Dziecięca matematyka. Edukacja matematyczna dzieci w domu, w przedszkolu i szkole](#), Warszawa: WSiP [także online, dostęp dn. 13.10.2017, pdf. 4,5 MB].

[Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej \(Dz.U. 2017 poz. 356\)](#) [online, dostęp dn. 13.10.2017, pdf. 3,74 MB].

Spis tabel

Tab. 1. Zestawienie przyrządów do pomiarów różnych wielkości nieciągłych

48

