Zestaw 4

Zeszyt 3

Jacek Stańdo

Jak rozwijać myślenie logiczne w edukacji matematycznej?

- Podstawy logiki
- Dowodzenie twierdzeń

Recenzja
Jolanta Lazar

Analiza merytoryczna
Elżbieta Miterka

Redakcja językowa i korekta
Joanna Roszak

Projekt graficzny, projekt okładki
Wojciech Romerowicz, ORE

Skład i redakcja techniczna
Grzegorz Dębiński

Projekt motywu graficznego „Szkoły ćwiczeń”
Aneta Witecka

ISBN 978-83-65967-00-8 (Zestawy materiałów dla nauczycieli szkół ćwiczeń – matematyka)
ISBN 978-83-65967-14-5 (Zestaw 4: Niestandardowe rozwiązania w edukacji matematycznej)
ISBN 978-83-65967-17-6 (Zeszyt 3: Jak rozwijać myślenie logiczne w edukacji matematycznej?)

Warszawa 2017
Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
www.ore.edu.pl

Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój

Ośrodek Rozwoju Edukacji

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

Spis treści

Wstęp

Logika jest nauką przydatną w życiu codziennym. Stykamy się z nią każdego dnia, nawet nie zdając sobie z tego sprawy. Pomaga nam zrozumieć pewne zasady rządzące światem, poprawnie naśladować wzory, rozwiązywać problemy i przewidywać skutki określonych działań. Jest zatem przydatna nie tylko naukowcom, ale i zwykłym ludziom. Wydaje się, że w polskiej szkole nie poświęca się jej wystarczająco wiele uwagi. W niniejszym zeszycie przedstawiamy początkowo podstawowe zagadnienia z zakresu logiki, by później na konkretnych przykładach wskazać metodyczne podpowiedzi dla młodych stażem nauczycieli.

Podstawy logiki

Zdanie logiczne to takie, któremu możemy przypisać wartość logiczną: prawdę (1) albo fałsz (0).
Zdania oznaczamy małymi literami: p, q, s. Wartość logiczną zdania zapisujemy p = 1 dla zdania prawdziwego, p = 0 dla zdania fałszywego.

Zaprzeczeniem zdania p nazywamy zdanie postaci „Nieprawda, że p" i zapisujemy ¬p.

Przykład

Zdanie p: Temperatura powietrza wynosi 25 stopni.

Zdanie ¬p: Nieprawda, że temperatura powietrza wynosi 25 stopni.

Tablica wartości logicznych.

p	¬p
1	0
0	1

Alternatywą dwóch zdań p, q nazywamy zdanie postaci ”p lub q” i zapisujemy pvq.

Przykład

Zdanie p: Temperatura powietrza wynosi 25 stopni.

Zdanie q: Pada deszcz.

Zdanie pvq: Temperatura powietrza wynosi 25 stopni lub pada deszcz.

Tablica wartości logicznych.

p	q	pvq
1	1	1
1	1	1
0	1	1
0	0	0

Koniunkcją dwóch zdań p, q nazywamy zdanie postaci „p i q” i zapisujemy ją p∧q.

Przykład

Zdanie p: Temperatura powietrza wynosi 25 stopni.

Zdanie q: Pada deszcz.

Zdanie p∧q: Temperatura powietrza wynosi 25 stopni i pada deszcz.

Tablica wartości logicznych

p	q	p∧q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Implikacją dwóch zdań p, q nazywamy zdanie postaci „Jeśli p, to q” i zapisujemy p⇒q.

Przykład

Zdanie p: Zdam egzamin.

Zdanie q: Pojadę na wakacje.

Zdanie p⇒q: Jeśli zdam egzamin, to pojadę na wakacje.

Tablica wartości logicznych

p	q	p⇒q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Równoważnością dwóch zdań p, q nazywamy zdanie postaci „p wtedy i tylko wtedy, gdy q” i zapisujemy p⇔q.

Przykład

Zdanie p: Zdam egzamin.

Zdanie q: Pojadę na wakacje.

Zdanie p⇔q: Zdam egzamin wtedy i tylko wtedy, gdy pojadę na wakacje.

Tablica wartości logicznych

p	q	p⇔q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tautologią, prawem logicznym, nazywamy zdanie, które jest zawsze prawdziwe.

Prawa logiczne

(pvq)⇔(qvp),
¬(¬p)⇔p,
pv¬p,
p⇒p.

Przykład

Zdanie postaci $p \vee \neg p$ jest zawsze prawdziwe.

Pada deszcz lub nieprawda, że pada deszcz.

Budowa i rodzaje twierdzeń

Twierdzenie w postaci implikacji

Dana jest podstawowa implikacja $p \Rightarrow q$.
Mówimy, że p jest warunkiem wystarczającym dla q, a q warunkiem koniecznym dla p.

$$q \Rightarrow p$$

Warunek wystarczający

Warunek konieczny

Przykład
Jeśli liczba dzieli się przez 6, to dzieli się przez 2.
Warunek konieczny podzielności liczb przez 6 to podzielność tej liczby przez 2.
Warunek wystarczający dla podzielności liczb przez 2 to podzielność tej liczby przez 6.
Zauważmy, że podzielność przez 2 nie jest warunkiem wystarczającym dla podzielności przez 6.

Przykład
Jeśli liczba dzieli się przez 6, to dzieli się przez 2 i 3.
Warunek konieczny podzielności liczb przez 6 to podzielność tej liczby przez 2 i 3.
Warunkiem wystarczającym dla podzielności liczb przez 2 i 3 jest podzielność tej liczby przez 6.

Zauważmy, że podzielność przez 2 i 3 jest warunkiem wystarczającym dla podzielności przez 6.

Przykład
Liczba dzieli się przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy dzieli się przez 2 i 3.
Warunek konieczny i wystarczający dla podzielności liczb przez 6 to podzielność tej liczby przez 2 i 3.

Wyróżniamy następujące typy zadań:

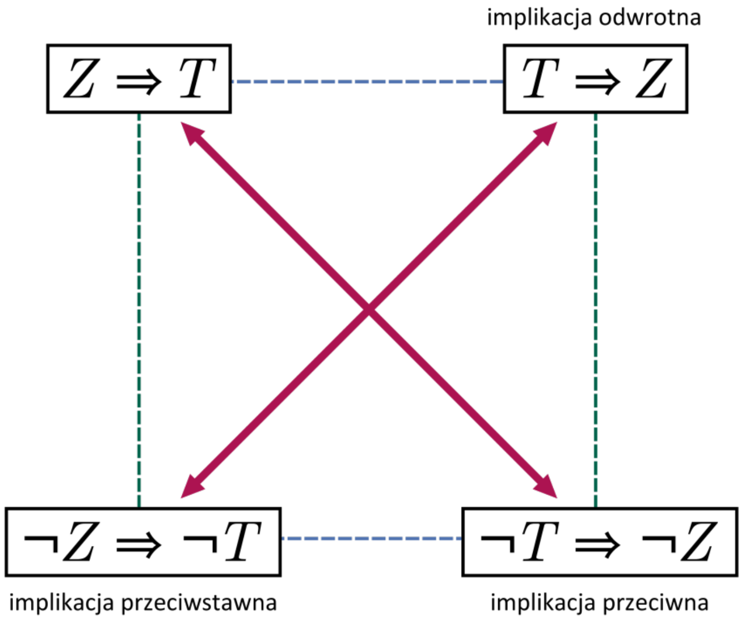
- implikacja odwrotna $q \Rightarrow p$,
- implikacja przeciwstawna $\neg q \Rightarrow \neg p$,
- implikacja przeciwna $\neg p \Rightarrow \neg q$,
- dowodzenie implikacji $p \Rightarrow q$.

Prawo transpozycji

Implikacja prosta jest równoważna implikacji przeciwstawnej.

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

Implikacje połączone przekątną koloru czerwonego są równoważne.



Twierdzenie w postaci równoważności.
Dana jest równoważność $p \Leftrightarrow q$.

Dowodzenie twierdzeń

Sposoby dowodzenia twierdzeń to:

- Dowód dedukcyjny

Jest to dojście do określonego wniosku na podstawie wcześniejszych danych. Wychodzimy od założenia twierdzenia, zakładamy aksjomaty oraz wcześniej udowodnione twierdzenia. Metodę dedukcyjną opracował Arystoteles.

- Dowód redukcyjny

Rozumowanie to polega na wychodzeniu od tego, co chcemy udowodnić, do tego, co jest dane.

- Dowód nie wprost

Dowód ten opiera się na założeniu o nieprawdziwości tezy, z którego wyprowadza się sprzeczność zdania prawdziwego.

- Dowód indukcyjny

Bazuje na zasadzie indukcji matematycznej:
Istnieje taka liczba n_0, że twierdzenie jest prawdziwe dla liczby n_0.
Dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ prawdziwa jest implikacja: jeśli twierdzenie jest prawdziwe dla liczby naturalnej n, to twierdzenie jest prawdziwe dla kolejnej liczby naturalnej.
Wtedy twierdzenie jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$.

Jak udowodnić równoważność?

Metoda 1
Równoważności dowodzi się przez udowodnienie implikacji $p \Rightarrow q$ i implikacji $q \Rightarrow p$.

Metoda 2
Wychodzimy od zdania p i wykonując równoważne przekształcenia, dochodzimy do zdania q.

Dowody twierdzeń

Nauka dowodzenia twierdzeń powinna być wieloletnim procesem, rozpoczętym w pierwszej klasy szkoły podstawowej.

Przedstawiamy etapy nauki twierdzeń wraz z przykładami.

Zadanie

Która figura ma kolor żółty i jest kwadratem?

Komentarz

Podstaw logiki możemy uczyć już na etapie wczesnoszkolnym.

Zadanie

Która figura nie jest trójkątem?

Komentarz

W ten sposób ćwiczymy kształtowanie zdania zaprzeczonego.

Zadanie

W zadaniu: „Jeśli $a = b$, to $a^2 = b^2$” wyróżnij założenie i tezę.

Komentarz

Uczniowie muszą odróżniać założenie od tezy.

Zadanie

Udowodnij, stosując rozumowanie dedukcyjne: „jeśli $a = b$, to $a^2 = b^2$”.

Przykładowy dowód

$a = b \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow (a - b)(a + b) = 0 \Rightarrow a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow a^2 = b^2$

Komentarz

Należy zwrócić uwagę na dedukcyjny sposób rozumowania.

Zadanie

Udowodnij, stosując rozumowanie redukcyjne: „jeśli $a=b$, to $a^2 = b^2$”.

Przykładowy dowód

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = (a + b) \cdot 0 = 0$

Zadanie

Sprawdź, czy hipoteza jest prawdziwa: „jeśli $a + b > 0$, to $a = b$”.
Komentarz

Ważne jest, aby uczeń rozumiał, że wystarczy podać jeden przykład, który nie spełnia hipotezy, aby ona była fałszywa.

Zadanie

Na podstawie twierdzenia: „jeśli $a = b$, to $a^2 = b^2$” zbuduj hipotezę odwrotną.

Komentarz

Zwracamy uwagę na fakt, że zbudowanie hipotezy odwrotnej nie jest jednoznaczne z tym, że hipoteza jest prawdziwa i staje się twierdzeniem.

Rozwiązanie

„Jeśli $a^2 = b^2$, to $a = b$”. Możemy zapytać uczniów, czy hipoteza jest prawdziwa.
Zauważmy, że np. dla $a = 2$, $b = -2$ hipoteza jest fałszywa.

Zadanie

Wiadomo, że hipoteza: „jeśli $a^2 = b^2$, to $a = b$" jest fałszywa. Uzupełnij założenie, aby hipoteza była prawdziwa.

Przewidywane rozwiązania.
Jeśli $a^2 = b^2$ i $a, b > 0$, to $a = b$.
Jeśli $a^2 = b^2$ i $a, b \geq 0$, to $a = b$.
Jeśli $a^2 = b^2$ i $a, b < 0$, to $a = b$.
Jeśli $a^2 = b^2$ i $a, b \leq 0$, to $a = b$.
Jeśli $a^2 = b^2$ i a, b takich samych znaków, to $a = b$.

Komentarz.

Uzupełnianie hipotez, aby stały się twierdzeniami, to bardzo ważna umiejętność.

Twierdzenie

Udowodnij, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Dowód

Dowód ten będzie opierał się na założeniu o nieprawdziwości tezy, z którego wyprowadzimy sprzeczność zdania prawdziwego.

Szkic dowodu

Przypuśćmy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną. Wtedy da się przedstawić jako √2=p/q, gdzie p, q są liczbami naturalnymi.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Podnosząc obie strony do kwadratu, otrzymamy

$$p \cdot p = 2 \cdot q \cdot q$$

Rozłóżmy liczbę p, q na czynniki pierwsze.

Zauważmy, że po lewej stronie zawsze będziemy mieli parzystą liczbę dwójek, a po prawej zawsze nieparzystą liczbę dwójek. To jest sprzeczność.

Zatem udowodniliśmy twierdzenie.

Komentarz

Zastosowana metoda nie wprost.

Twierdzenie

Udowodnij, że $n^2 + n$ jest podzielne przez 2.

Dowód

Dla $n = 1$ mamy $n^2 + n = 1^2 + 1 = 2$, zatem jest podzielna przez 2.

Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Załóżmy, że dla n twierdzenie jest prawdziwe, zatem $n^2 + n$ jest podzielne przez 2. Pokażemy, że wzór jest prawdziwy dla kolejnej liczby naturalnej $n + 1$, tzn. $(n + 1)^2 + (n + 1)$ jest podzielne przez 2.

$(n + 1)^2 + (n + 1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = (n^2 + n) + 2(n + 1)$.

Pierwszy składnik jest podzielny przez 2, drugi także.
Na mocy indukcji matematycznej wzór jest prawdziwy dla dowolnej liczby naturalnej.

Komentarz

Zastosowana metoda indukcji matematycznej.

Twierdzenie

Udowodnij, że liczba jest podzielna przez 15 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 5 i 3.
Dowód twierdzenia polega na udowodnieniu implikacji $p \Rightarrow q$ i implikacji $q \Rightarrow p$, gdzie p – liczba podzielna przez 15, q – liczba podzielna przez 5 i 3.

Odkrywanie wzorów i dowodzenie twierdzeń

Obliczmy sumę n kolejnych liczb nieparzystych, $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$.
Policzmy sumę 3 pierwszych wyrazów: $1 + 3 + 5 = 9$.
Policzmy sumę 4 pierwszych wyrazów: $1 + 3 + 5 + 7 = 16$.
Policzmy sumę 5 pierwszych wyrazów: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$.

Uczniowie powinni zauważyć, że kolejne sumy to kwadraty kolejnych liczb naturalnych. Zatem postawmy hipotezę:

$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

Możemy to twierdzenie udowodnić indukcyjnie.

Dla n = 1 mamy $1 = 1^2$, zatem jest prawdziwa.

Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Załóżmy, że dla n twierdzenie jest prawdziwe, zatem

$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

Pokażemy, że wzór jest prawdziwy dla kolejnej liczby naturalnej n+1, tzn.

$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 2) = (n + 1)^2$

Istotnie,

$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 2) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$

Na mocy indukcji matematycznej wzór jest prawdziwy dla dowolnej liczby naturalnej.

Twierdzenie możemy także udowodnić, stosując rozumowanie dedukcyjne.

Niech $a_1 = 1$, $r = 2$. Oznaczmy przez $a_n = 2n - 1$ ciąg arytmetyczny. Korzystając ze wzoru na sumę ciągu arytmetycznego, mamy:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{1 + (2n - 1)}{2} n = n^2$$

Oczywiście, pamiętajmy, że wzór $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$ powinien być wcześniej udowodniony.

Stawianie hipotez z wykorzystaniem Geogebry

Jak dobrać sytuacje, aby poprowadzić ucznia do sformułowania twierdzenia lub postawienia hipotezy? Propozycję takich zabiegów podaje Z. Krygowska, wyróżniając kilka takich sytuacji:

- uczeń odkrywa twierdzenie przez rozwiązanie zadania,
- uczeń formułuje twierdzenie, rozwiązując otwarte zadanie, w którym ujawnia się twierdzenie i dowód,
- uczeń sam stawia pytanie i poszukuje odpowiedzi, korzystając z pomocy nauczyciela,
- uczeń formułuje twierdzenie w postaci hipotezy, wykorzystując intuicję (rozwój nowych technologii informacyjnych rozszerza listę zabiegów prowadzących do postawienia hipotezy),
- uczeń ma podane wszystkie lub częściowe założenia twierdzenia, niedokończoną tezę i na podstawie symulacji komputerowej, która generuje problem, kończy twierdzenie w postaci hipotezy,
- uczeń poprzez formułowanie i dowodzenie kilku twierdzeń wykorzystujących symulację komputerową, kierowanych przez nauczyciela, stawia twierdzenie w postaci hipotezy, która jest uogólnieniem kilku twierdzeń.

Warto pamiętać słowa L. Eulera: „Poznanie oparte jedynie na doświadczeniu, dopóki nie otrzyma dowodu, należy koniecznie odróżnić od prawdy”.

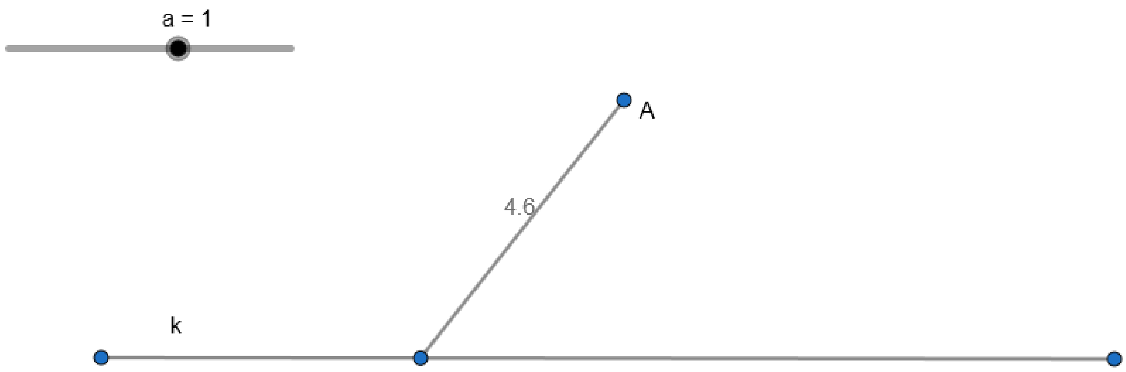
Przedstawimy kilka przykładów, jak z wykorzystaniem symulacji uczniowie mogą stawiać hipotezy. Materiał badawczy składał się z trzech części: odległość, trójkąt, czworokąt.

Odległość

Definicja

Odległością punktu A, który nie należy do prostej, od prostej k, nazywamy długość najkrótszego odcinka, którego jednym końcem jest punkt A, zaś drugim punkt należący do prostej. Odległość punktu od prostej, gdy ten do niej należy, wynosi 0.

Poruszając suwakami, ustaw odległość punktu A od prostej k.

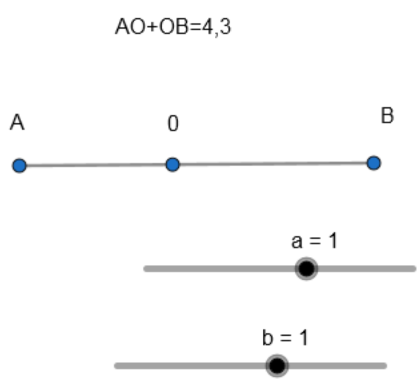


Dokończ hipotezę.

Hipoteza

Odległość punktu A od prostej k jest równa długości odcinka, który jest... do tej prostej.

Poruszając suwakami, obserwuj sumę odległości odcinków AO i OB.

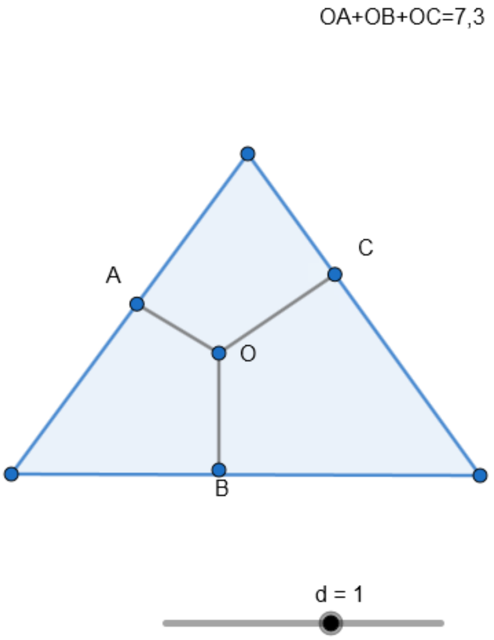


Dokończ hipotezę.

Hipoteza

Dany jest dowolny odcinek AB i punkt O należący do tego odcinka. Suma odległości punktu O od wierzchołków odcinka jest liczbą... i równą...

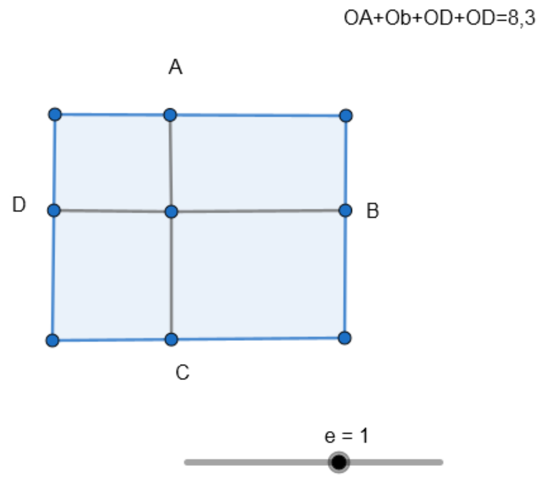
Poruszając suwakiem (generując różne trójkąty równoboczne, czyli trójkąty foremne) i punktem O, obserwuj sumę odległości odcinków OA, OB i OC. Zaobserwuj sytuacje, kiedy punkt O pokrywa się z dowolnym wierzchołkiem. Jaką hipotezę możesz postawić?



Hipoteza

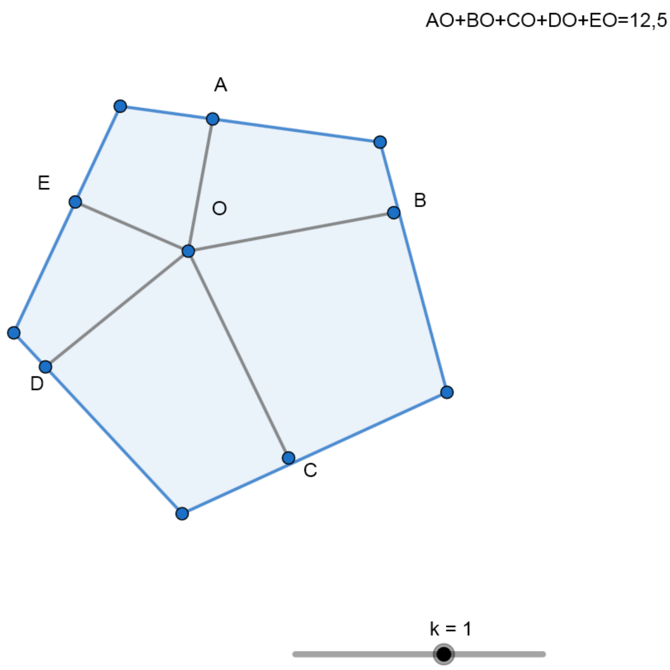
Dany jest dowolny trójkąt równoboczny i punkt O należący do trójkąta. Suma odległości punktu O od wszystkich boków trójkąta jest... i równa... tego trójkąta.

Poruszając suwakiem (generując różne kwadraty, czyli czworokąty foremne) i punktem O, obserwuj sumę odległości odcinków OA, OB, OC i OD. Zaobserwuj sytuacje, kiedy punkt O pokrywa się z wierzchołkiem kwadratu. Jaką hipotezę możesz postawić?



Hipoteza:

Dany jest dowolny kwadrat.
Poruszając suwakiem (generując różne pięciokąty foremne) i punktem O, obserwuj sumę odległości odcinków OA, OB, OC, OD i OE. Jaką hipotezę możesz postawić?



Hipoteza

Obserwując wielokąty foremne, n kąt foremny wypukły (dla n = 3, 4, 5), postaw hipotezę dla dowolnego wypukłego wielokąta foremnego.

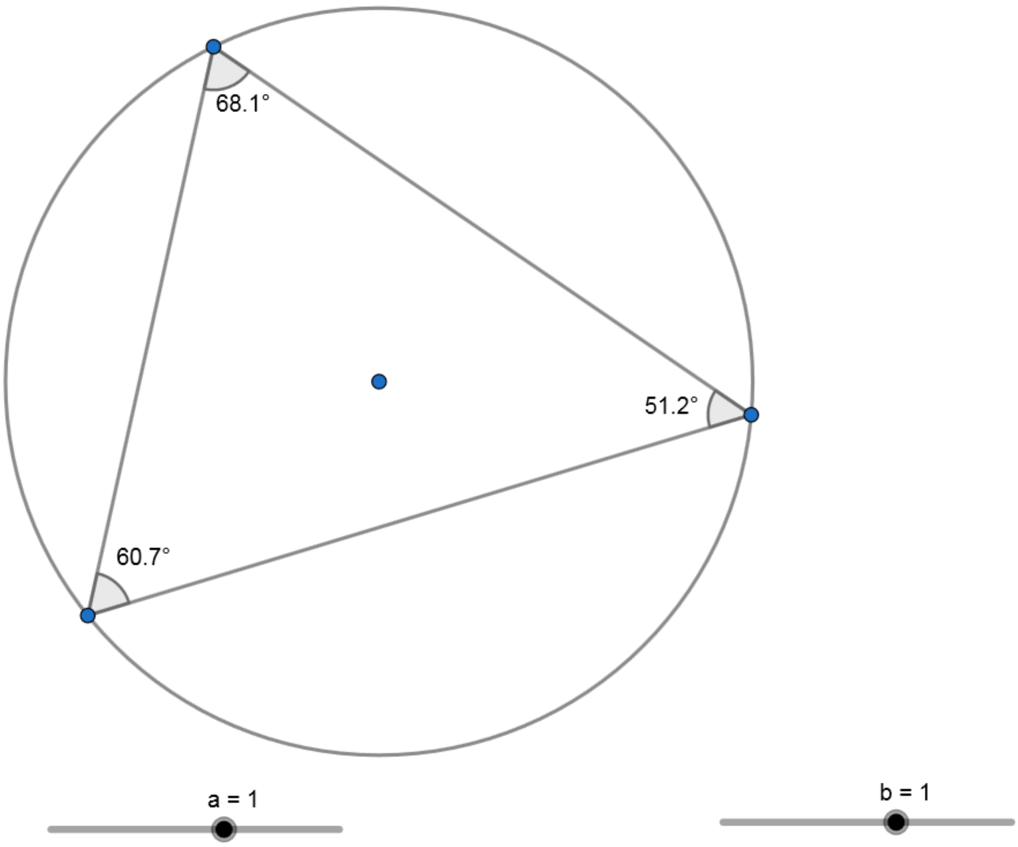
Hipoteza

Dany jest dowolny wypukły wielokąt foremny...

Na podstawie powyższych hipotez, uogólnij je dla czworościanu i sześcianu.
Zadanie dla studenta matematyki: uogólnij powyższe hipotezy dla figur w przestrzeniach n-wymiarowych.

Własności trójkąta

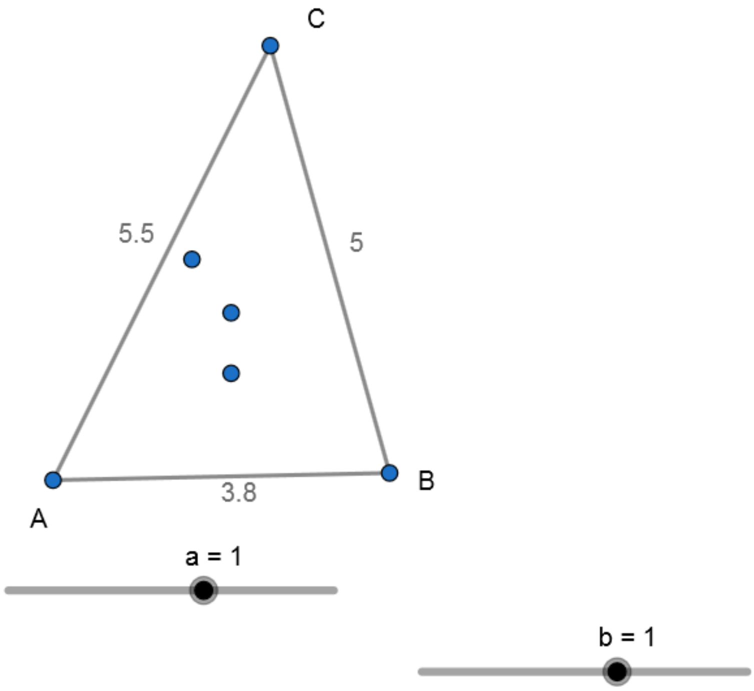
Poruszając suwakami (generując różne trójkąty), obserwuj, dla jakich trójkątów środek okręgu opisanego na trójkącie leży poza trójkątem. Zaobserwuj sytuacje, kiedy punkt O leży na boku trójkąta. Jaką hipotezę możesz postawić?



Hipoteza

Środek okręgu opisanego na trójkącie leży poza trójkątem, jeśli trójkąt jest...

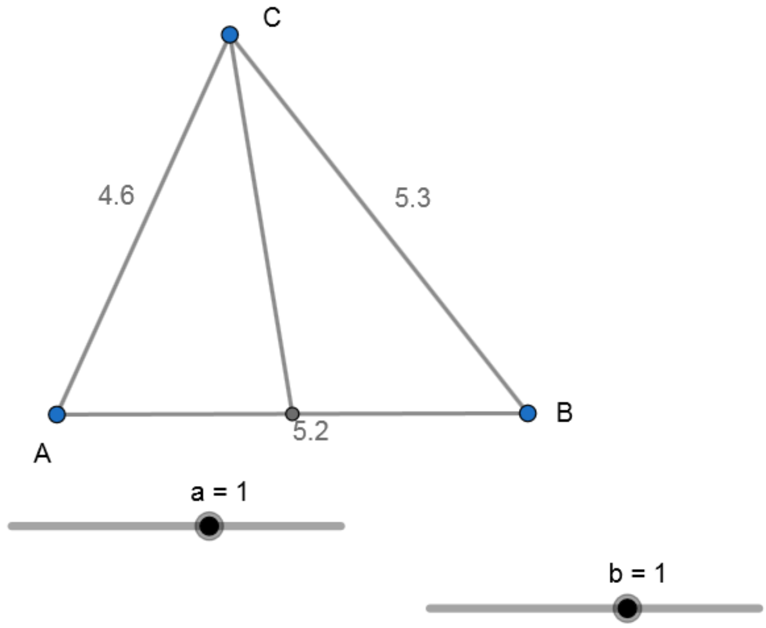
Poruszając suwakami (generując różne trójkąty), obserwuj, dla jakich trójkątów środek okręgu opisanego na trójkącie, środek okręgu wpisanego w trójkąt oraz środek ciężkości trójkąta pokrywają się. Jaką hipotezę możesz postawić?



Hipoteza

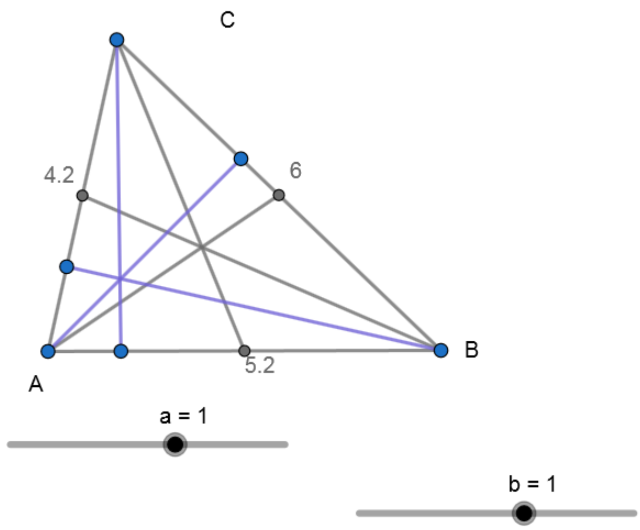
Środek okręgu opisanego na trójkącie, środek okręgu wpisanego w trójkąt oraz środek ciężkości trójkąta pokrywają się, jeśli trójkąt jest...

Poruszając suwakami (generując różne trójkąty), obserwuj, dla jakich trójkątów długość środkowej trójkąta BD jest równa połowie długości boku trójkąta (AC), na który została opuszczona. Jaką hipotezę możesz postawić?



Hipoteza

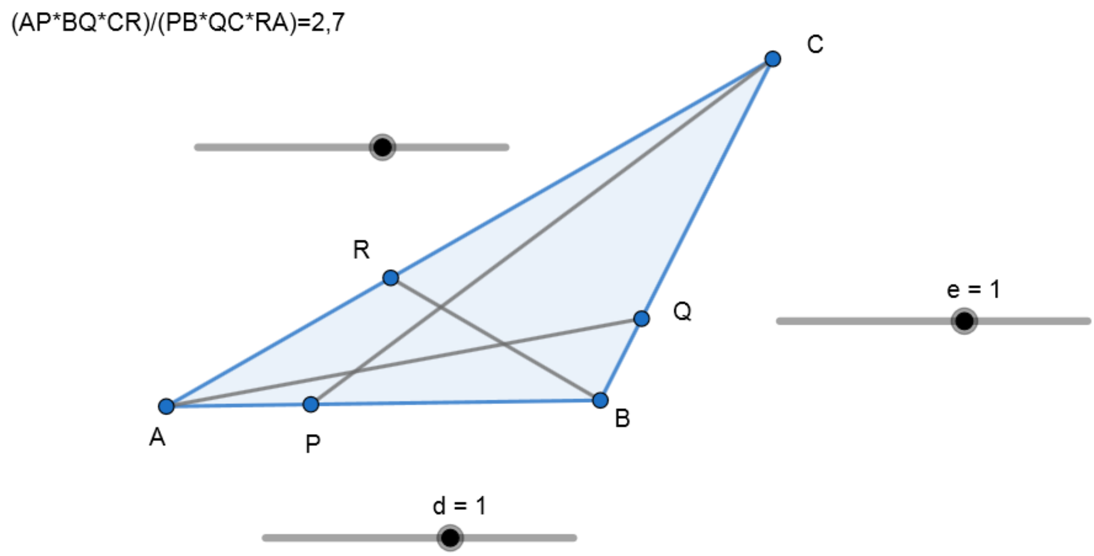
Jeśli długość środkowej trójkąta jest równa połowie długości boku, na który została opuszczona, to trójkąt jest...
Poruszając suwakami (generując różne trójkąty), obserwuj, dla jakich trójkątów pewna jego środkowa pokrywa się z wysokością. Jaką hipotezę możesz postawić?



Hipoteza

Jeśli pewna środkowa trójkąta pokrywa się z wysokością, to trójkąt jest...

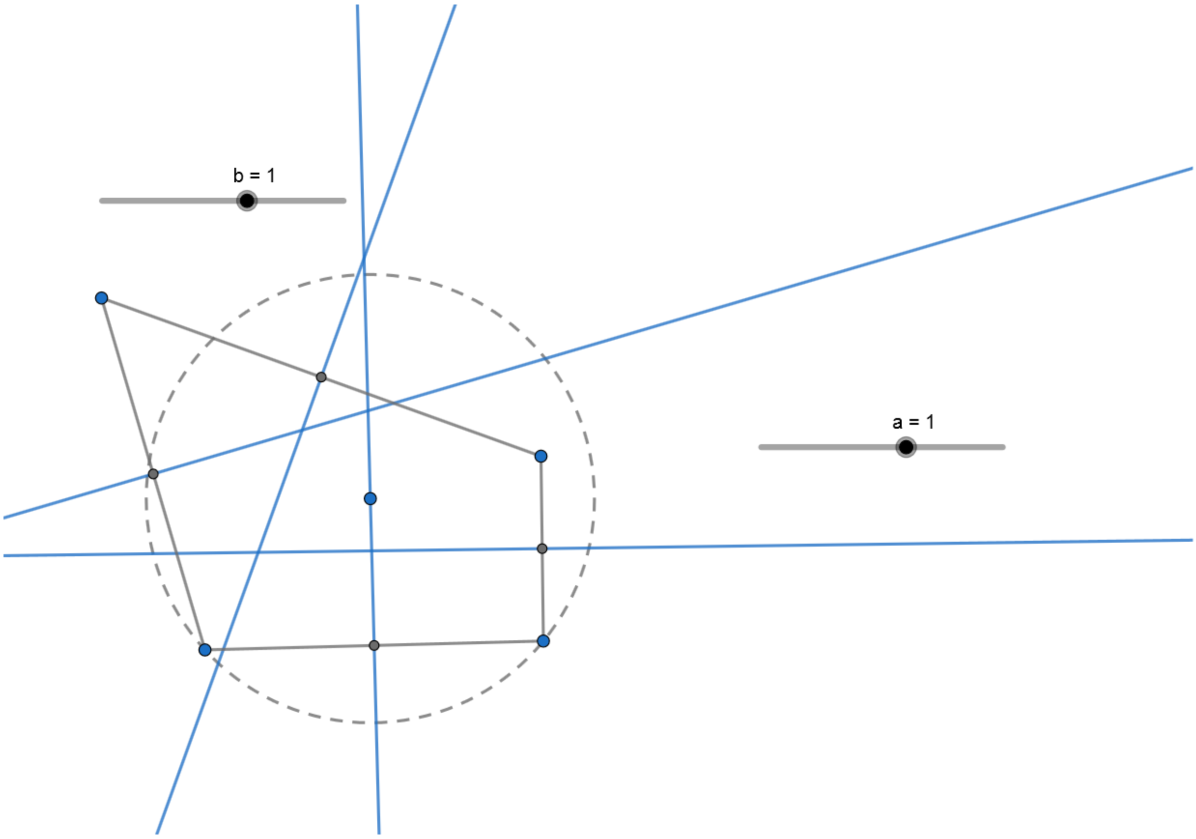
Poruszając suwakami (generując różne trójkąty), obserwuj, jaka jest wartość odpowiedniego stosunku, w przypadku gdy odcinki AQ, BR, CP przetną się w jednym punkcie. Jaką hipotezę możesz postawić?



Hipoteza
Dany jest dowolny trójkąt ABC oraz punkty P,Q,R należące do odpowiednich boków trójkąta. Jeśli...

Własności wielokątów

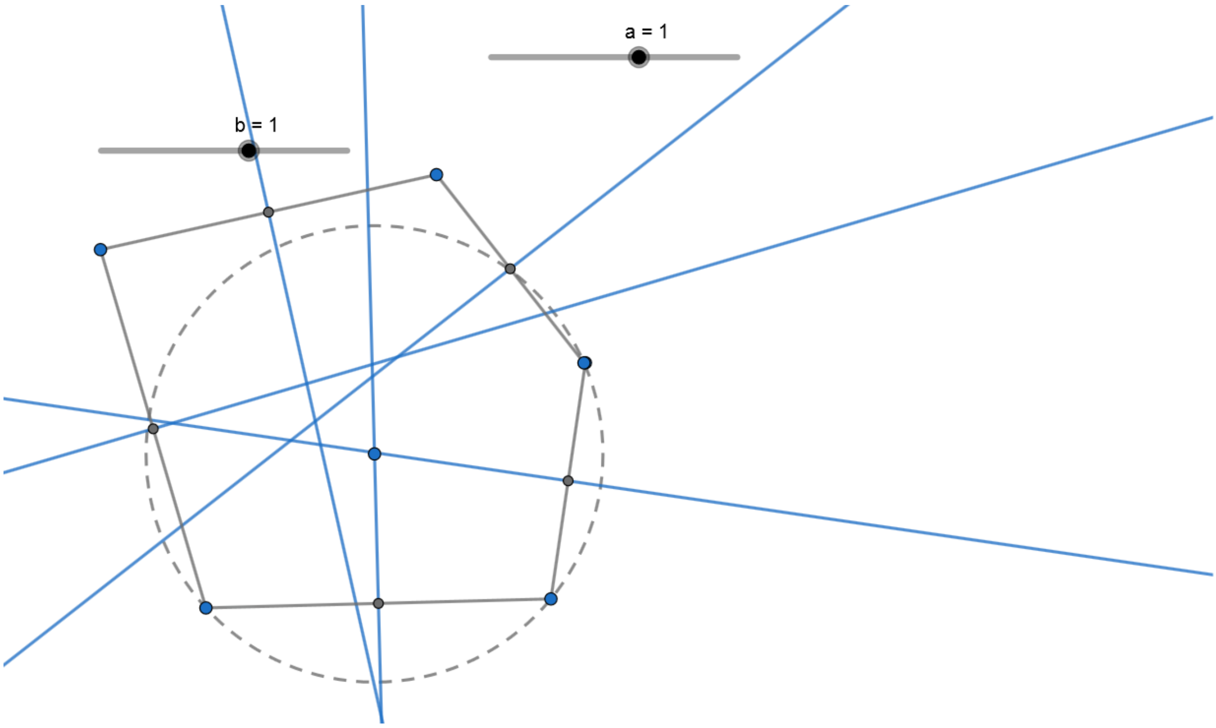
Poruszając suwakami, generuj różne czworokąty, na których opisano koło. Obserwuj, co dzieje się ze wszystkimi symetralnymi boków. Jaką hipotezę możesz postawić?



Hipoteza

Dany jest czworokąt, na którym opisano koło. Wtedy wszystkie środkowe boków czworokąta...

Poruszając suwakami, generuj różne pięciokąty, na których opisano koło. Obserwuj, co dzieje się z symetralnymi wszystkich boków. Jaką hipotezę możesz postawić?



Hipoteza

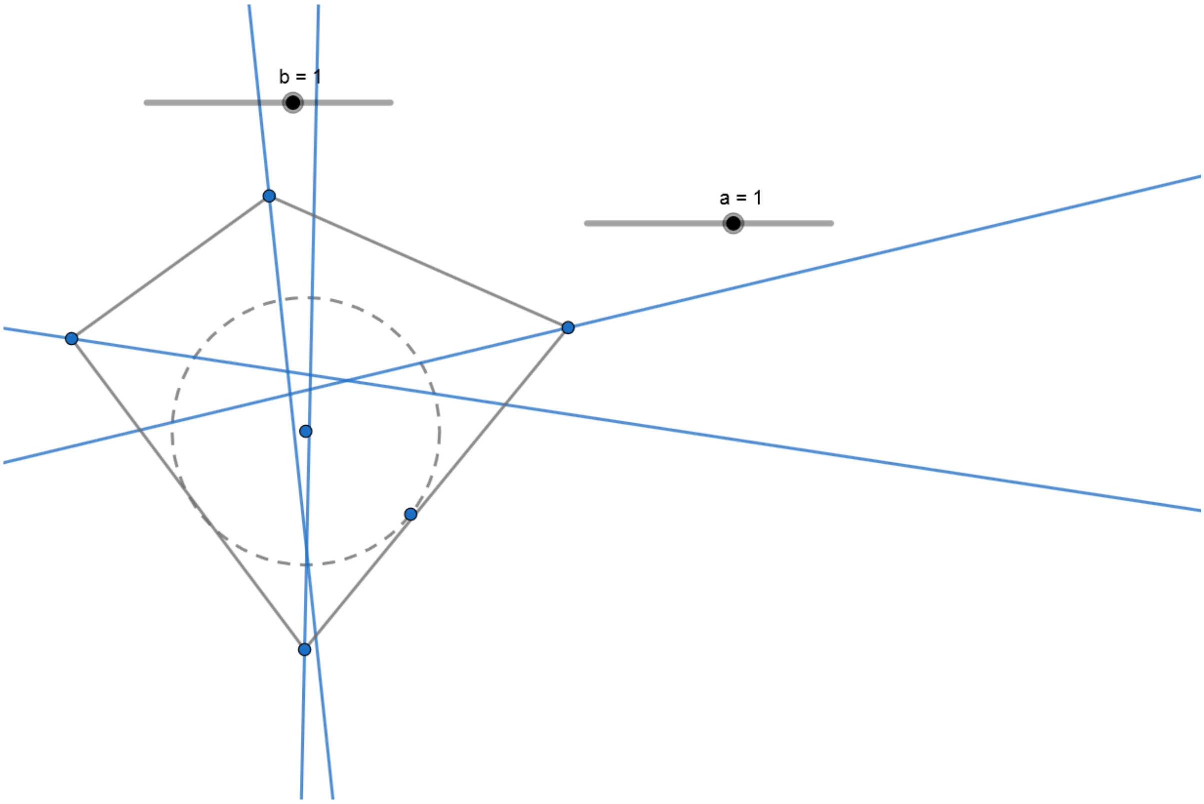
Dany jest pięciokąt, na którym opisano koło. Wtedy wszystkie środkowe boków pięciokąta...

Obserwując wielokąt, na którym opisano koło, uogólnij hipotezę dla dowolnego wielokąta, na którym opisano koło.

Hipoteza

Dany jest dowolny wielokąt, na którym opisano koło...

Poruszając suwakami, generuj różne czworokąty, w które wpisano koło. Obserwuj, co dzieje się ze wszystkimi dwusiecznymi kątów. Jaką hipotezę możesz postawić?



Hipoteza

Dany jest czworokąt, w który wpisano koło. Wtedy wszystkie dwusieczne kątów...

Obserwując wielokąty, w które wpisano koło, uogólnij hipotezę dla dowolnego wielokąta, w który wpisano koło.

Hipoteza

Dany jest dowolny wielokąt, w który wpisano koło...

Analiza zadań na dowodzenie z egzaminów zewnętrznych

- Matura podstawowa

Zadanie 1

Wykaż, że liczba $4^{2017} + 4^{2018} + 4^{2019} + 4^{2020}$ jest podzielna przez 17.

Rozwiązanie

$4^{2017}(1 + 4 + 16 + 64) = 4^{2017} \cdot 5 \cdot 17$

Rozwiązywalność 36%. Co trzeci uczeń rozwiązał to zadanie.

W tym samym egzaminie zadanie z zakresu działania na potęgach rozwiązało 74% zdających.

Zadanie 27

Liczba $5^8 \cdot 16^{-2}$ jest równa

a) $\left(\frac{5}{2}\right)^8$

b) $\frac{5}{2}$

c) 10^8

d) 10

Oznacza to, że dwóch uczniów na trzech posługuje się potęgami.

Schemat postępowania dla uczniów, którzy rozwiązali zadanie 1 i nie rozwiązali zadania 27.

Rozłóż na czynniki pierwsze liczby:
$46, 78, 102.$

Zapisz w postaci iloczynowej: $5^{20} + 5^{18}$.
Uzasadnij, że liczba $5^{20} + 5^{18}$ dzieli się przez 6.

Ponownie przystępujemy do rozwiązania zadania 27.

- Matura rozszerzona

Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość

$$x^2 + y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$$

Rozwiązanie.

$$x^2y^2 - 4xy + 4 + 2x^2 - 4xy + 2y^2 > 0$$

$$(xy - 2)^2 + 2(x^2 - 2xy + y^2) > 0$$

$$(xy - 2)^2 + 2(x - y)^2 > 0$$

Ponieważ x jest różne od y, czyli drugi składnik jest większy od zera, pierwszy składnik jest większy lub równy zero.

Dowiedliśmy tezy.

Rozwiązywalność 26%. Co czwarty uczeń rozwiązał to zadanie.

W tym samym egzaminie zadanie z zakresu działania wykorzystania wzoru na kwadrat różnicy było rozwiązywane na poziomie 62%. Co drugi uczeń rozwiązał to zadanie.

Liczba $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$ jest równa

A. 2

B. 4

C. $\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{3}$

Schemat postępowania dla uczniów, którzy rozwiązali zadanie 1. i nie rozwiązali zadania 7.

Uzupełnij: $x^2 + 4xy + \cdots = (\ldots. + y)^2$.

Zapisz jako kwadrat sumy: $x^2y^2 + 6xyz^2 + z^4$.

Uzasadnij, że: $a^2 + (b^2 + 1)^2 > 0$.

Ponownie przystępujemy do rozwiązania zadania 21.

- Egzamin gimnazjalny

Zapisano trzy rózne liczby, których średnia arytmetyczna jest równa 4, oraz dwie inne liczby, których średnia arytmetyczna jest równa 2. Uzasadnij, że średnia arytmetyczna zestawu tych pięciu liczb jest równa 3,2. Zapisz obliczenia.

Rozwiązanie

Suma trzech pierwszych liczb jest równa: a + b + c = 12

Suma dwóch następnych liczb jest równa: d + e = 4

Suma pięciu liczb jest równa: 16.

Średnia: $\frac{16}{5} = 3{,}2$

Rozwiązywalność 23%. Co czwarty uczeń rozwiązał to zadanie.

Schemat postępowania dla uczniów, którzy nie rozwiązali tego zadania.

Oblicz średnią z liczb: 3, 5, 12, 4.

Średnia temperatura z kilku ostatnich dni wynosiła 8 stopni. Dziś jest 10 stopni. Czy się zwiększyła? Uzasadnij.

Średnia klasa IA wynosi 4,0. Średnia klasy IB wynosi 4,2. Ile wynosi średnia klas, jeśli IA jest 10 uczniów, a w klasie IB 15?

Ponownie przystępujemy do rozwiązania zadania 21.

Bibliografia

Kahneman D., (2012), *Pułapki myślenia. O myśleniu szybkim i wolnym*, Poznań: Media Rodzina.