ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

Jak pracować z uczniem zdolnym?

Poradnik nauczyciela matematyki

praca zbiorowa pod red. Małgorzaty Mikołajczyk

Jak pracować z uczniem zdolnym?
Poradnik nauczyciela matematyki

praca zbiorowa pod redakcją
Małgorzaty Mikołajczyk

Ośrodek Rozwoju Edukacji
Warszawa 2012

Wydawca:
Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
tel. +48 22 345 37 00
fax +48 22 345 37 70

Publikacja powstała w ramach projektu „Opracowanie i wdrożenie kompleksowego systemu pracy z uczniem zdolnym”

Autorzy:
Jacek Dymel
Kinga Gałązka
Marek Kordos
Małgorzata Mikołajczyk
Stefan Mizia
Krzysztof Omiljanowski
Michał Śliwiński
Piotr Zarzycki

Redaktor merytoryczny:
Małgorzata Mikołajczyk

Recenzent:
Maria Mędrzycka

Projekt graficzny:
Agencja Reklamowa FORMS GROUP

Nakład: 10 000 egz.

ISBN: 978-83-62360-03-1

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Przygotowanie do druku, druk i oprawa:
Agencja Reklamowo-Wydawnicza A. Grzegorczyk
www.grzeg.com.pl

Spis treści

Zespół autorów poradnika **4**

Od redakcji **5**

CZĘŚĆ I
Jak uczyć, aby rozwijać potencjał intelektualny ucznia (czyli matematyka dla każdego) **7**
1. O matematyce realistycznej – Małgorzata Mikołajczyk 8
2. O wspomaganym technologicznie odkrywaniu twierdzeń – Piotr Zarzycki 18
3. O nauczaniu metodą projektu edukacyjnego – Małgorzata Mikołajczyk 28

CZĘŚĆ II
Jak uczyć geometrii (czyżby matematyka prawie dla nikogo?) **41**
1. O tym, czego nie widać – Marek Kordos 42
2. Piękno geometrycznych rozumowań – Stefan Mizia 52
3. Dowody geometryczne w praktyce – Małgorzata Mikołajczyk 62
4. Dynamiczne nauczanie geometrii – Piotr Zarzycki 67

CZĘŚĆ III
Jak uczyć, aby rozwijać zainteresowania ścisłe ucznia (czyli matematyka dla wielu) **81**
1. Koło matematyczne – Kinga Gałązka 82
2. Koma – łowimy talenty – Małgorzata Mikołajczyk 94
3. Liga zadaniowa – Michał Śliwiński 103
4. Mecz matematyczny – Małgorzata Mikołajczyk 112
5. Konkursy matematyczne – Kinga Gałązka 120
6. Obóz matematyczny – Małgorzata Mikołajczyk 134
7. Uczeń zdolny pod katedrą – Jacek Dymel 143
8. Matematyczne wycieczki – Małgorzata Mikołajczyk 150

CZĘŚĆ IV
Jak uczyć, aby wychować laureata olimpiady (czyli matematyka dla wybranych) **163**
1. Korespondencyjny klub olimpijczyka – Krzysztof Omiljanowski 164
2. Kółko olimpijskie – Jacek Dymel 173
3. Seminaria uczniowskie – Michał Śliwiński 185
4. Warsztaty olimpijskie – Jacek Dymel 189
5. Uczniowskie prace badawcze z matematyki – Jacek Dymel 194
6. Biblioteczka olimpijczyka – Jacek Dymel 205

Posłowie **213**

Zespół autorów poradnika

Jacek Dymel – nauczyciel matematyki w V LO w Krakowie, Koordynator Małopolski Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, współzałożyciel Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów i Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej, wychowawca wielu olimpijczyków, autor zbiorów zadań szkolnych i konkursowych. W 2009 roku obronił doktorat w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego napisany pod kierunkiem Michała Szurka i dotyczący analizy trudności zadań z Olimpiady Matematycznej.

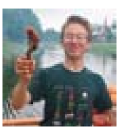
Kinga Gałązka – nauczycielka matematyki w XLVII LO w Łodzi, doradca metodyczny w Łódzkim Centrum Doskonalenia Nauczycieli i Kształcenia Praktycznego, autorka podręczników, zbiorów zadań i materiałów pomocniczych do nauczania matematyki, członkini komitetu organizacyjnego konkursu „Kangur Matematyczny", popularyzatorka synergii i holizmu w edukacji.

Marek Kordos – profesor Uniwersytetu Warszawskiego, geometra i historyk matematyki, pierwszy (i jak dotąd jedyny) redaktor naczelny czasopisma „Delta", znakomity wykładowca i popularyzator matematyki, autor wielu książek, współzałożyciel Ośrodka Kultury Matematycznej oraz Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej.

Małgorzata Mikołajczyk – kierownik Pracowni Dydaktyki Matematyki na Uniwersytecie Wrocławskim, redaktor naczelna „Magazynu Miłośników Matematyki", założycielka Wrocławskiego Portalu Matematycznego. Działa w Fundacji Matematyków Wrocławskich, organizując m.in. Dolnośląskie Mecze Matematyczne, Maraton Matematyczny, Matematyczne Marsze na Orientację, Mistrzostwa w Szybkim Liczeniu czy Zimowe Szkoły Matematyki i Letnie Obozy Matematyczne dla uczniów.

Stefan Mizia – emerytowany pracownik Politechniki Wrocławskiej, nauczyciel matematyki w XIV LO we Wrocławiu, miłośnik geometrii, organizator Mistrzostw Polski w Geometrii Elementarnej, autor zbioru zadań „Wykaż, że…" oraz „Historii Śląska". Przewodnik sudecki i instruktor przewodnictwa, wraz z synami (też matematykami) gra w zespole Mizia & Mizia Blues Band.

Krzysztof Omiljanowski – matematyk z Uniwersytetu Wrocławskiego, popularyzator matematyki i wykorzystania komputerów w jej nauczaniu. Przez wiele lat uczył matematyki we wrocławskich liceach nr III i XIV, redagował czasopismo dla nauczycieli „Matematyka", był pomysłodawcą Korespondencyjnego Klubu Olimpijczyka. Działa w Fundacji Matematyków Wrocławskich, redaguje Wrocławski Portal Matematyczny.



Michał Śliwiński – informatyk i matematyk z Uniwersytetu Wrocławskiego, nauczyciel matematyki i informatyki w III LO we Wrocławiu, redaktor „Magazynu Miłośników Matematyki" i Wrocławskiego Portalu Matematycznego, przewodniczący komitetu głównego Olimpiady Lingwistyki Matematycznej, działa w Fundacji Matematyków Wrocławskich.

Piotr Zarzycki – matematyk i dydaktyk z Instytutu Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, autor podręczników i zbiorów zadań, pasjonat teorii liczb i wykorzystania komputerów w nauczaniu matematyki. Zajmuje się popularyzacją matematyki, prowadzi dział „Wszystkie twierdzenia małe i duże" w czasopiśmie „Nauczyciele i Matematyka".

Od redakcji

Szanowni Czytelnicy!

Niniejszy poradnik na pierwszy rzut oka może się wydać mało spójnym zlepkiem różnych idei i pomysłów, ale taki zamiar przyświecał jego powstaniu – przedstawić nauczycielom wachlarz sprawdzonych możliwości skutecznego uczenia matematyki zamiast uczenia odtwarzania algorytmów na potrzeby sztampowych zadań egzaminacyjnych. Autorzy nie chcą nikogo przekonywać do swoich koncepcji, ale się nimi podzielić. Można więc z poradnika wybierać według własnego uznania niczym z kosza rozmaitości, niektóre pomysły odrzucić, inne wypróbować, a jeszcze inne od razu potraktować jak swoje własne. Zapewniam, że nie ma w nim propozycji teoretycznych i niesprawdzonych. Wszyscy autorzy to osoby mające wieloletnie doświadczenie w materii, o której piszą, znane ze swoich osiągnięć i cenione w regionie i kraju. Z pewnością warto obdarzyć niniejszy poradnik zaufaniem i próbować zaszczepić prezentowane w nim pomysły na własnym gruncie, adaptując je do swoich potrzeb.

Matematyczne zainteresowania i talenty uczniów rzadko są nauczycielom dane. W większości przypadków muszą oni solidnie na nie zapracować swoim entuzjazmem, zaangażowaniem, pomysłowością i profesjonalizmem. Mamy nadzieję, że w tym niełatwym zadaniu niniejszy poradnik okaże się pomocny, podpowiada bowiem, jak pracować z całkiem przeciętnymi uczniami, rozbudzając ich zainteresowania i motywację, by stali się uczniami nieprzeciętnymi. Różnica między nauczycielami uczniów zdolnych i całkiem przeciętnych zazwyczaj polega wyłącznie na tym, że ci pierwsi ze swoimi uczniami ciężko pracują, a ci drudzy od razu dają za wygraną.

Staramy się wobec tego odpowiedzieć na pytania, jak kształcić uczniów myślących, twórczych i pomysłowych, jak zaszczepiać w nich matematyczne pasje i jak rozwijać zainteresowania, wreszcie – jak kształcić kluczowe dla matematyki umiejętności: logicznego myślenia, precyzyjnego argumentowania, posługiwania się technikami algebraicznymi i dostrzegania geometrycznych zależności.

Właśnie geometrii poświęciliśmy osobną część poradnika, ponieważ jest to dział matematyki szkolnej niezwykle trudny zarówno do opanowania przez uczniów, jak i do nauczania przez nauczycieli. Wiedząc jednak jak wielkie trudności dydaktyczne sprawia geometria nie tylko początkującym, ale i doświadczonym nauczycielom, nie mogliśmy (i nie chcieliśmy) pominąć tego problemu w poradniku.

Ze względu na ograniczoną objętość poradnika opisaliśmy w nim tylko wybrane formy pracy i narzędzia dydaktyczne, z wielu innych z żalem rezygnując. Jeśli mimo to niektóre opisane tu pomysły wzbogacą warsztat pracy choćby kilku nauczycieli i staną się inspiracją do ich własnych eksperymentów dydaktycznych oraz poszukiwania nowych, lepszych dróg nauczania matematyki, to znaczy, że dokonaliśmy dobrego wyboru.

Ekipie autorów w imieniu całej redakcji dziękuję za sprawną współpracę przy Poradniku, zaś Czytelnikom życzę w imieniu autorów satysfakcji z lektury oraz wielu sukcesów w próbach wdrażania i ulepszania zaprezentowanych tu pomysłów.

Małgorzata Mikołajczyk

CZĘŚĆ I

Jak uczyć, aby rozwijać potencjał intelektualny ucznia (czyli matematyka dla każdego)

1. O matematyce realistycznej – Małgorzata Mikołajczyk
2. O wspomaganym technologicznie odkrywaniu twierdzeń – Piotr Zarzycki
3. O nauczaniu metodą projektu edukacyjnego – Małgorzata Mikołajczyk

1. O matematyce realistycznej

Małgorzata Mikołajczyk, Wrocław

Motywacjami do uczenia się rządzą dwie zasady: bliskości wiedzy i jej pragmatyzmu. Chętniej uczymy się tego, co jest bliskie naszemu codziennemu doświadczeniu, o czym już trochę wiemy i co nas bezpośrednio dotyczy. Znacznie łatwiej i w sposób trwalszy przyswajamy też wiedzę, która może się przydać w wielu życiowych sytuacjach, a nie tylko na egzaminie. Roztropny nauczyciel z tych zasad potrafi uczynić swojego sprzymierzeńca, odwołując się w procesie edukacyjnym do zjawisk codziennego życia, co określa się mianem matematyki realistycznej.

Czym jest, a czym nie jest matematyka realistyczna?

Ten kierunek nauczania wprowadził na stałe do dydaktyki XX-wieczny holenderski matematyk Hans Freudenthal. Mniejszy nacisk kładzie się w nim na formalizm, większy – na obserwacje samodzielnych działań uczniów, postawionych przed odpowiednio dla nich przygotowanymi problemami odwołującymi się do codziennego doświadczenia. Celem jest wyrobienie u nich umiejętności dostrzegania i stosowania matematyki w życiowych sytuacjach. Realizm tego kierunku przyjmuje, że umysłu dziecka nie należy traktować jako *tabula rasa*, ale że każda nowo zdobyta porcja wiadomości powinna wynikać z wcześniejszych doświadczeń, intuicji i wiedzy nieformalnej ucznia. Nie ma tu miejsca na pakowanie mu do głowy matematyki gotowej, objawionej i jedynie słusznej. Zakłada się możliwość jej poszukiwania i błądzenia.

Chociaż taki styl nauczania jest od lat postulowany przez dydaktyków i władze oświatowe, jego realizacja jest dość powierzchowna. Analizując pod tym kątem zawartość podręczników szkolnych i zbiorów zadań, widać, że autorzy chętnie czerpią tematy zadań tekstowych z życia osobistego, rodzinnego, szkolnego i społecznego uczniów, a mimo to stawiane im problemy dalekie są od rzeczywistości i bardzo rzadko są autentycznymi zastosowaniami szkolnej matematyki. Bywają sztuczne, kłócą się ze zdrowym rozsądkiem, nie pobudzają motywacji ucznia i niewiele wnoszą z punktu widzenia jego zdolności matematycznych.

Matematyka pseudorealistyczna

Pominę tu anegdotyczne wręcz przypadki zadań, w których wynikiem jest *trzy i pół krasnoludka*, kupuje się $1^3/_7$ *metra wstążki* czy zjada $^5/_{17}$ *tabliczki czekolady*. Oto przykłady dwóch z pozoru poprawnie skonstruowanych problemów dotyczących zagadnień tak zwanego życia codziennego.

Każdy z 8 woźniców przywiózł do tartaku po 5 kloców, a każdy z 4 traktorzystów po 15 kloców. Ile kloców przywieźli do tartaku traktorzyści i woźnice?

Okno ma $1\frac{4}{5}$ *m wysokości. Szerokość okna stanowi* $\frac{2}{3}$ *jego wysokości. Ile metrów kwadratowych powierzchni ma okno?*

Zauważmy, że treść tych zadań nie jest istotna dla procesu ich rozwiązania. Pierwsze mogłoby równie dobrze dotyczyć skrzynek z gwoździami czy butelek z sokiem, drugie – płótna obrazu czy powierzchni ogródka. Rozwiązanie tych zadań się nie zmieni, gdyż w zadaniu pierwszym w ogóle nie wykorzystujemy wiedzy o sytuacji opisanej w treści, a w drugim – w bardzo niewielkim stopniu (milczące założenie, że okno ma kształt prostokąta). Zadania tego typu można nazwać pseudorealistycznymi. Często stosowane, powodują brak zainteresowania uczniów sytuacją zadaniową. Rozwiązywanie ogranicza się do wyrażenia treści zadania w języku matematycznym i zastosowania znanych algorytmów i twierdzeń w celu uzyskania odpowiedzi. Interpretacja wyniku następuje w sposób automatyczny, co prowadzi do zaniku refleksji nad jego poprawnością w świetle treści zadania i zdrowego rozsądku. Brak odwołań do pozamatematycznej wiedzy uczniów o sytuacji zadaniowej tłumi w nich naturalne instynkty – ciekawości, nieufności i dociekliwości.

Zadania realistyczne powinny istotnie bazować na pozamatematycznej wiedzy ucznia dotyczącej rozważanego problemu, a ich rozwiązanie powinno pogłębiać jego wiedzę o świecie fizycznym. Oto przykład takiego zadania.

Polonez Jana Kowala pali 9 l benzyny na 100 km, a crysler Johna Smitha przejeżdża 20 mil na jednym galonie paliwa. Który samochód jest bardziej ekonomiczny? Który zajedzie dalej na pełnym baku?

W treści wykorzystano tradycyjne sposoby podawania wielkości spalania paliwa stosowane w Polsce i USA. Aby rozwiązać to zadanie, uczeń musi sprawdzić rozmiary jednostek niemetrycznych i dokonać stosownych przeliczeń. Zadanie wymaga też przyjęcia własnej interpretacji niejednoznacznie zadanego pytania. Za miarę ekonomiczności samochodu można bowiem uznać wielkość spalania lub koszt podróży. Wtedy trzeba jeszcze porównać ceny paliwa w obu krajach w przeliczeniu na tę samą jednostkę. W ostatnim pytaniu istotna jest wiedza o pojemności baków obu samochodów. Jak widać w tym przykładzie, sytuacja zadaniowa ma istotny wpływ na rozwiązanie. Uczeń musi ustalić, jakie wiadomości będą mu potrzebne, a następnie zdobyć je i umiejętnie wykorzystać.

Aby uznać zadanie za realistyczne, nie wystarczy, że opisuje sytuację, w której mógłby się potencjalnie znaleźć każdy uczeń. Taki charakter ma większość zadań dotyczących zakupów, powtarzających się do znudzenia w podręcznikach, na przykład poniższe:

Jacek kupił 5 zeszytów po 1 zł 60 gr, 3 ołówki po 1 zł 20 gr i gumkę za 3 zł 50 gr. Ile reszty otrzymał z 20 zł?

Zadanie to nie pobudza motywacji uczniów, bo właściwie nikogo nie interesuje, ile Jacek zapłacił za swoje zakupy. Należy tylko wykonać odpowiednie działania na liczbach podanych w treści zadania i sprawdzić poprawność wyniku z odpowiedzią. Dlaczego w życiu jest inaczej? Ponieważ proces zakupów jest bardziej złożony i wiążą się z nim rozmaite emocje. Często uczeń jest postawiony w sytuacji wyboru i poszukiwania kompromisu między swoimi potrzebami a przeznaczonym na zakupy limitem pieniędzy. Sytuacja realna angażuje go więc w proces planowania, co odpowiada etapowi konstruowania zadania. Niestety, nie odzwierciedlają tego zadania podręcznikowe. Aby stworzyć realistyczny kontekst zadania, także one powinny angażować ucznia emocjonalnie, stawiać go w sytuacji wyboru, narzucać konieczność rozstrzygnięcia problemu, opowiedzenia się za którąś z racji. Zadanie o zakupach Jacka mogłoby wtedy wyglądać na przykład tak:

Jacek miał kupić 5 zeszytów, które kosztują po 1 zł 60 gr, 3 ołówki po 1 zł 20 gr i gumkę za 3 zł 50 gr. Dostał od mamy na zakupy 20 zł, ale w sklepie okazało się, że z dziurawej kieszeni wypadła mu gdzieś pięciozłotówka. Czy wystarczy mu pieniędzy na zakupy? Co zrobiłbyś na jego miejscu?

Podobny charakter mają poniższe zadania:

Renault Marka spalił 20 litrów benzyny na 290 km, a opel Heńka – 12 litrów na 170 km. Heniek mówi, że jego wóz jest bardziej ekonomiczny, Marek – że nie ma między nimi różnicy. Kto ma rację?

Mama trójki dzieci w wieku 11, 6 i 3 lata postanowiła na poświątecznej wyprzedaży kupić komplet świeczek urodzinowych. Pakowane są w pudełkach po 24 sztuki. Czy takie opakowanie wystarczy, aby w przyszłym roku udekorować wszystkie trzy torty urodzinowe jej dzieci?

Często efekt podniesienia motywacji uczniów i emocjonalnego zabarwienia problemu można uzyskać, nadając realistyczny kontekst nawet prostym ćwiczeniom rachunkowym. Oto przykłady.

Ile razy trzeba wejść na 10. piętro, aby „wspiąć się” na Mount Everest?

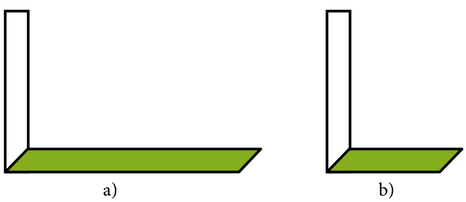
Jak długo musiałbyś chodzić na piechotę do szkoły, aby pokonać łącznie drogę długości równika?

W niewielkim miasteczku powiatowym podstawówka, gimnazjum i liceum mieszczą się w tym samym budynku. Czy to możliwe, żeby Jaś Wędrowniczek, który właśnie zdał maturę, chodząc codziennie do szkoły na piechotę, pokonał drogę równą odległości Ziemi od Księżyca?

Abstrahowanie i konkretyzacja

Zadania realistyczne powinny uświadamiać uczniom charakter powiązań pomiędzy światem materialnym konkretnych rzeczy i sytuacji a matematycznym światem abstrakcyjnych pojęć, zależności i operacji. To, co dzieje się wokół nas, może stanowić źródło pojęć, struktur i problemów dających się abstrahować i przenieść w świat matematyczny. Z kolei, struktury, pojęcia i relacje matematyczne mogą zostać zastosowane do opisu konkretnych rzeczy i zdarzeń oraz do rozstrzygnięcia problemów w świecie realnym. Rozwiązywanie zadań realistycznych powinno więc dostarczać uczniom autentycznych doświadczeń w zakresie abstrahowania i konkretyzacji. Oto prosty przykład.

W którym miejscu znajduje się żarówka oświetlająca słupek?



Rys. 1

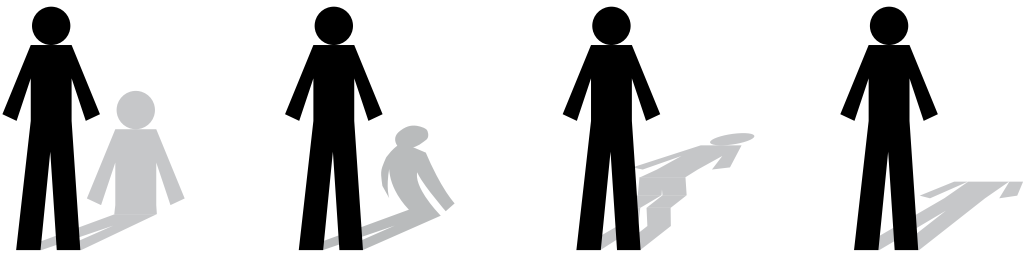
Wychodząc od obserwacji rzeczywistości i wiedzy nieformalnej uczniów, poprzez serię zadań i eksperymentów dotyczących cieni rzucanych przez różne przedmioty, możemy dojść do abstrakcyjnego pojęcia rzutu i opisać jego matematyczne własności. Mamy tu do czynienia z procesem abstrahowania wykorzystującym intuicje fizyczne pojęcia i nauczanie na poziomie przeddefinicyjnym. Odwrotny proces zachodzi w trakcie rozwiązywania poniższego zadania.

Wykonaj model figury, która oświetlana z różnych stron daje cienie będące trójkątem, kwadratem i kołem.

Tym razem uczeń musi zastosować wiadomości dotyczące rzutów figur przestrzennych do skonstruowania modelu spełniającego warunki zadania, mamy tu więc do czynienia z procesem konkretyzacji matematycznych idei. Początkowo uczeń może rozważać figury spełniające dowolne dwa z podanych warunków (graniastosłup trójkątny, stożek, walec), aby stopniowo modyfikować opis ostatecznej bryły.

Należy pamiętać, że z punktu widzenia ucznia celem tych zadań ma być badanie zjawiska cienia, a nie jakiegoś abstrakcyjnego pojęcia matematycznego. Powinno się w tym cyklu znaleźć miejsce i dla takiego realistycznego zadania:

Co to jest? Czy wszystkie sytuacje są możliwe?



a) b) c) d)

Rys. 2

Modelowanie i matematyzacja

Zadanie, które wymaga bezpośredniego zastosowania matematyki, nie może być uznane za realistyczne, gdyż życie nigdy tego typu problemów przed nami nie stawia. Czy gdzieś poza podręcznikami do matematyki spotykamy takie pytania?

Przyjmując 3,14 jako wartość przybliżoną liczby π*, oblicz długość okręgu o promieniu 3,14.*

Na budziku wskazówka minutowa ma długość 4 cm. Jaką drogę przebywa w ciągu 24 godzin koniec tej wskazówki?

Zadania te wymagają jedynie użycia wzoru na długość okręgu, przy czym w ich treści jest zawarte wyraźne polecenie, że taką właśnie czynność należy wykonać. Dostarczone są też wszystkie potrzebne dane. W zadaniu realistycznym kluczowymi elementami procesu rozwiązywania są modelowanie matematyczne (abstrahowanie), czyli poczynienie takich założeń, które idealizując rzeczywistość, pozwolą na stosowanie do niej reguł matematycznych, oraz matematyzowanie treści zadania (konkretyzacja), czyli przełożenie jej z języka naturalnego na język matematyki. W takich zadaniach często konieczne jest też ustalenie, jakie informacje są potrzebne do uzyskania rozwiązania i gdzie można je zdobyć. Jak wobec tego powinno być sformułowane dobre zadanie realistyczne, dotyczące wykorzystania wzoru na długość okręgu? Może tak:

Z jaką prędkością porusza się Ziemia w ruchu dookoła Słońca?

Pytanie jest sformułowane niezwykle prosto, a jednak nie od razu jest dla ucznia jasne. Musi dokonać jego analizy, aby lepiej zrozumieć sytuację i zorientować się, o jaką prędkość chodzi, w jaki sposób można ją obliczyć, jakie dane będą mu do tego potrzebne i gdzie je znaleźć. Do rozwiązania zadania uczeń musi wykorzystać swoją wiedzę o ruchu Ziemi. W procesie modelowania musi założyć (niezgodnie z rzeczywistością), że orbita Ziemi ma kształt okręgu, a planeta porusza się po niej ruchem jednostajnym. Dopiero na etapie rachunków zadanie to sprowadza się do obliczenia długości okręgu oraz zastosowania wzoru na prędkość. Motywację do rozwiązania tego zadania podnosi – zawodna w tym przypadku – intuicja, często bowiem podpowiada uczniom, że Ziemia porusza się powoli, podobnie jak wskazówki zegara, które pozornie pozostają w bezruchu. Nie przychodzi im do głowy, że Ziemia porusza się z zawrotną prędkością, bo nie odczuwamy typowych konsekwencji takiego ruchu (szum, powiew powietrza), jak na przykład przy szybkiej jeździe samochodem. Tym bardziej zaskakujący jest dla uczniów otrzymany wynik.

Niestety, tak sformułowanego zadania nie udało mi się znaleźć w żadnym podręczniku, chociaż trafiłam na bardzo podobne (?). Zwróćmy uwagę, jak zostało sformułowane:

Średnia odległość Ziemi od Słońca wynosi ok. $1{,}5\cdot10^{11}$ *m. Długość toru Ziemi wokół Słońca jest około 6,3 razy większa od podanej odległości. Dla obiegu Ziemi wokół Słońca trzeba około 365 dni. Oblicz przeciętną prędkość Ziemi w drodze wokół Słońca.*

Jest to wyjątkowo zatrważający przykład tego, jak stosowanie matematyki można sprowadzić tylko do rachunków i mechanicznego stosowania reguł. Wszystkie potrzebne dane zawarte są w treści zadania, uczeń nie musi nawet wiedzieć, jak długo trwa ruch Ziemi wokół Słońca. Etap wyłonienia specyficznego problemu matematycznego i zaplanowanie procesu jego rozwiązania są w tym zadaniu tak marginalne, że z pewnością (zapewne wbrew oczywistym intencjom autora) nie można tego zadania nazwać realistycznym.

Nawiasem mówiąc, dobre zadanie realistyczne wcale nie musi mieć realistycznej treści. Paradoks jest tu tylko pozorny. Oto przykład.

Arkadia i Bajlandia posiadają po jednym kurorcie nad Morzem Rajskim i walczą o turystów. Agenci z wywiadu gospodarczego Arkadii postanowili umieścić na orbicie geostacjonarnej parasol, który spowodowałby trwałe całkowite zaćmienie Słońca nad kurortem Bajlandii. Jak duży powinien być ten parasol?

Dodatkowe pytanie: *Czy wystarczy do tego parasol zwykłych rozmiarów, czy też potrzeba parasola wielkości samochodu ciężarowego albo całego miasta?* wzmacnia motywację, gdyż pokazuje uczniom, jak nikłe są ich intuicje w tematach „kosmicznych". W zadaniu tym, w sposób naturalny i nietrywialny, znajdują zastosowanie proporcje trygonometryczne, ale rozwiązanie bogate jest w matematyczne aktywności, jakich wymagamy od problemu realistycznego. Dodatkowo mamy tu do czynienia z etapem wizualizacji i matematyzacji opisanej sytuacji (np. należy ustalić, że oba państwa leżą na Ziemi, że chodzi o zaćmienie w jednym punkcie itp.).

Przeanalizujmy jeszcze jedno zadanie.

Tomek przebiegł 100 m w 20 sekund. Jaką drogę przebiegnie w ciągu 5 minut?

Nietrudno znaleźć odpowiedź na to pytanie. W ciągu minuty Tomek przebiegnie 300 m, zatem w ciągu 5 minut – 1,5 km. Podobnie odpowiadają i uczniowie, i studenci, i nauczyciele, a przecież jest to odpowiedź sprzeczna z fizjologią ludzkiego organizmu. Wie o tym każde dziecko i każde oburzyłoby się, gdyby zmierzyć mu czas na „setkę" i kazać pokonać wyliczony na tej podstawie (w analogiczny sposób do powyższego zadania) dystans w ciągu 5 minut. Sprzeciwi się zdrowy rozsądek. Zatem dlaczego na lekcjach matematyki nikt nie wszczyna buntu? Bo to przecież tylko matematyka, to nie ma nic wspólnego z rzeczywistością! Tego właśnie skutecznie uczymy naszych uczniów na naszych lekcjach.

Czy wobec tego odpowiedź na pytanie o to, jaką drogę przebiegnie Tomek, jest w ogóle osiągalna na gruncie szkolnej matematyki? Po postawieniu tego problemu w klasie uczniowie przez chwilę są zupełnie zbici z tropu, a potem wybucha dyskusja i wtedy dopiero rozpoczyna się proces stosowania matematyki. Jakie założenia przyjąć, żeby rozwiązanie było wiarygodne? Czy ma być nim liczba, czy przedział? Czy można założyć, że każde następne 100 m Tomek biegnie o 1 s dłużej niż poprzednie? Ale przecież na finiszu z pewnością znów przyspiesza. Może sprawdzić to eksperymentalnie? W ten sposób powstaje matematyczny model sytuacji zadaniowej. Finalne zadanie jest trudniejsze, ale i ciekawsze. Istotny jest w nim nie wynik końcowy, ale te wszystkie dodatkowe czynności, które uczniowie musieli wykonać, a których zabrakło w pierwotnej wersji rozwiązania. Jak widać, to, czy zadanie jest realistyczne, czy nie, zależy nie od samego zadania, ale od tego, w jaki sposób je rozwiązujemy.

Czym właściwie jest modelowanie matematyczne?

Wiemy już, że etap modelowania matematycznego jest niezbędnym elementem przejścia od zadania realistycznego do matematycznego. W podręcznikach jest jednak najczęściej pomijany. W zadaniach milcząco zakładamy kołowość orbity Ziemi, stosujemy twierdzenie Talesa do obliczenia wysokości drzewa, choć ani drzewo, ani grunt nie są proste; zaniedbujemy opór powietrza w ruchu nawet w sytuacjach, gdy ruch jest właśnie tym oporem spowodowany (inaczej poruszamy się wszak po piasku i po lodzie) itp. A przecież etap modelowania jest niezwykle ważny i uczniowie muszą być jego świadomi. Bez niego w ogóle nie byłby możliwy etap matematyzacji. Matematyka przecież w ogóle nie stosuje się do rzeczywistości, tylko do idealnych abstrakcyjnych obiektów. Dlatego proces modelowania problemu należy w nauczaniu eksponować, a nie wstydliwie przemilczać. Tylko w ten sposób możemy nauczyć uczniów stosowania matematyki. Muszą często stawać w sytuacji, w której konieczne jest poczynienie dodatkowych założeń, aby robić to świadomie i dostrzegać wszystkie istotne elementy tego procesu.

Najtrudniejszą (ale i najciekawszą) częścią rozwiązania zadania realistycznego, stanowiącą o jego istocie, jest etap matematyzacji problemu. Uczeń powinien samodzielnie poszukiwać własnych interpretacji codziennych sytuacji i mieć pozostawioną swobodę ich opisu za pomocą matematyki. Dzięki temu może się sensownie odwoływać do własnych wyobrażeń o problemie, stanowiących odskocznię dla matematycznych pojęć i operacji. To uczeń, a nie autor podręcznika, musi odpowiedzieć na pytania: *Gdzie tu jest matematyka*? i *Jaka matematyka kryje się za tym problemem*?, to uczeń musi postawić problem w języku matematycznym. Dostrzega wtedy, w jaki sposób zastosowanie matematyki pozwala ten problem uprościć, sformułować jaśniej i bardziej precyzyjnie, oraz jak matematyka dostarcza narzędzi do poradzenia sobie z nim.

Po dokonaniu matematyzacji często problem przestaje być ciekawy, poddaje się go standardowej obróbce pozwalającej uzyskać wynik, jednakże to właśnie realistyczny kontekst podtrzymuje zainteresowanie problemem, sprawia, że warto jeszcze raz spojrzeć na początkowe pytanie w nowym aspekcie.

Zofia Krygowska pisała: „[…] najważniejszą z punktu widzenia stosowania matematyki sprawą jest wprowadzenie ucznia w metodę stosowania matematyki, a więc także w proces matematyzacji. Nie nauczymy go tego na przykładach gotowych już, aksjomatycznie ujętych teorii matematyki stosowanej, a więc na przykładzie wprowadzenia go w stadium już po matematyzacji". Eliminując z rozwiązywanych przez uczniów zadań etap ich matematyzacji, dostarczamy im sztucznych, spreparowanych, pseudorealistycznych problemów, wbrew pozorom oderwanych od rozsądnej i rozpoznawalnej rzeczywistości. W efekcie powodujemy, że uczniowie nie potrafią dostrzegać matematyki wokół siebie, a w sytuacjach wymagających jej użycia, w których metoda postępowania nie jest jasno sprecyzowana, stają się całkowicie bezradni. Utrwala się więc ich przekonanie o całkowitej niestosowalności matematyki.

Realistyczne rachunki

Na koniec przytoczę jeszcze kilka zadań realistycznych odnoszących się do różnych działów i etapów nauczania. Mogą one stać się pretekstem do autentycznego stosowania matematyki. Ich charakterystyczną cechą jest to, że nawiązują do konkretnego problemu, a nie tematu w podręczniku, czy hasła w programie, dają więc szeroki i swobodny wybór metody rozwiązania w zależności od inwencji i dojrzałości matematycznej uczniów.

Jak w najlepszy sposób możesz dostać się z klasą ze szkoły do zoo?

Uczniowie powinni samodzielnie nadać interpretację sformułowaniu „najlepszy sposób". Mogą wziąć pod uwagę wygodę, bezpieczeństwo, czasochłonność i koszt wycieczki. Powinni ustalić, gdzie jest najbliższe zoo, i przeanalizować różne możliwe warianty komunikacyjne (przejazd do miasta pociągiem, autobusem kursowym, wynajętym autokarem lub samochodami prywatnymi; przejazd po mieście tramwajem z przesiadką lub autobusem bez przesiadki, zakup biletów jednorazowych lub czasowych; możliwość przejścia z dworca na piechotę). Celem matematycznym zadania są ćwiczenia rachunkowe, jednak angażuje ono uczniów bardziej niż tradycyjne słupki, kształci więcej umiejętności matematycznych (planowanie pracy, zdobywanie i analiza danych, szacowanie wielkości, ustalenie kryteriów i optymalizacja wyboru itp.) i wymaga wykorzystania wielu informacji dotyczących życia codziennego (ceny biletów komunikacji miejskiej, ceny i zużycie paliwa, korzystanie z planu miasta itp.).

Oblicz koszt położenia wykładziny w swoim pokoju.

Do ucznia należy ustalenie geometrycznego kształtu tej części pokoju, w której leżeć będzie wykładzina, i wykonanie szkicu, uwzględnienie problemu ścianek działowych, szaf wnękowych, wyjścia na korytarz, na balkon, ustalenie i zdobycie informacji potrzebnych do rozwiązania zadania (rodzaje i ceny wykładzin, standardowe wymiary w beli, cena usługi, koszty dodatkowe – np. obszycie ciętych krawędzi, listwy wykończeniowe), a dopiero na końcu wykonanie obliczeń stanowiących matematyczny cel zadania.

Realistyczne rysunki

Poprzednie zadania były problemami rachunkowymi wymagającymi dodatkowo zebrania i analizy danych. Jednak zagadnienia realistyczne mogą dotyczyć również problemów geometrycznych, jak w kolejnych dwóch zadaniach.

Mieszkasz na trzecim piętrze i przed twoim domem budują blok 11-piętrowy. Czy zasłoni ci słońce?

Aby rozwiązać to zadanie, trzeba przyjąć dodatkowe założenia, które uczeń musi ustalić samodzielnie (wzajemna lokalizacja budynków, ich orientacja w przestrzeni). Musi też ustalić, jakie informacje będą potrzebne, aby rozwiązanie było wiarygodne (wysokość piętra budynku, warunki oświetleniowe o różnych porach dnia i roku), i je zdobyć. Dopiero finalnym etapem jest wykonanie odpowiedniej konstrukcji geometrycznej.

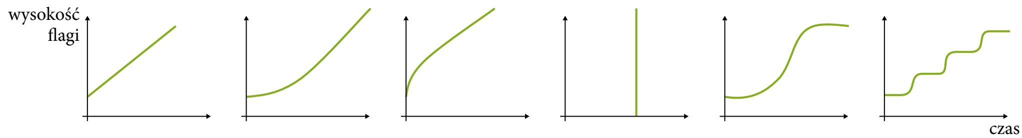
Tory kolejowe mają zmienić kierunek o 20° na łuku o długości 500 m. Zaprojektuj ten fragment linii kolejowej.

Na etapie modelowania matematycznego uczeń powinien założyć, że zakręt odbywał się będzie po łuku okręgu. W procesie matematyzacji następuje ustalenie danych (500 m to długość łuku okręgu wyciętego przez kąt środkowy o mierze 20°) oraz wielkości, które będą stanowić rozwiązanie zadania (znalezienie środka i promienia okręgu). Finalnym etapem jest wykonanie obliczeń i konstrukcji geometrycznej.

Realistyczne wykresy

Zadania realistyczne można też wykorzystać w nauce o funkcjach.

Codziennie na obozie służbowy harcerz wciąga flagę na maszt. Który wykres to ilustruje?

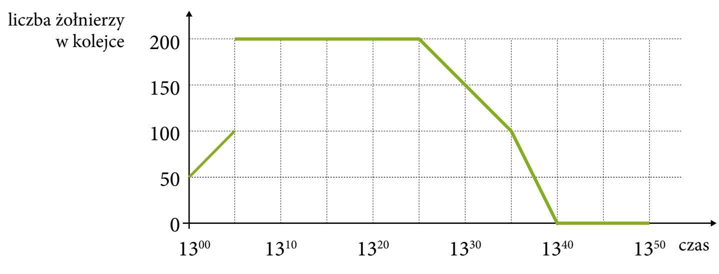


Rys. 3

Odpowiedź nie jest jednoznaczna. Uczeń musi przeanalizować, co oznacza każdy z tych wykresów, następnie zadecydować, który jest najbardziej realny, i swoją odpowiedź umotywować. Funkcja nie jest tu tworem abstrakcyjnym, ale ma realne odniesienie.

Kolejne zadanie pochodzi z brytyjskiego podręcznika „Matematyka w szkole średniej" (WSiP 1986).

Rysunek pokazuje długość kolejki po obiad w kantynie wojskowej w różnych godzinach. W ciągu minuty stołówka wydaje 20 obiadów.



Rys. 4

a) W jakich godzinach w kantynie są wydawane obiady?

b) Ilu ludzi dołączyło do kolejki między 13^{10} a 13^{20}?

c) W jakim tempie wydłużała się kolejka między 13^{00} a 13^{05}?

d) Co się wydarzyło pięć po trzynastej?

e) Szeregowy Atkins stanął w kolejce o 13^{20}. O której dostał obiad?

f) Czy do kolejki doszedł ktoś między 13^{25} a 13^{35}?

g) Co się działo między 13^{35} a 13^{40}?

Zadanie to pokazuje, jak wiele informacji można przeczytać z wykresu funkcji, ale i jak łatwo nieprawidłowo je zinterpretować. Uczy poprawnego formułowania wniosków, ukazując ograniczenia reprezentowania realnych zjawisk przy użyciu metod funkcyjnych. Nie na wszystkie zadane pytania można znaleźć odpowiedź na podstawie danych z wykresu, w niektórych narzucające się odpowiedzi stanowią nadinterpretację tych danych. Uczniowie często odpowiadają, że między 13^{10} a 13^{20} nikt nie dołączył do kolejki lub, że zrobiło to 200 osób. Pierwsza odpowiedź jest oczywiście błędna, a druga wcale nie wynika z podanych na wykresie informacji. Możemy z nich wywnioskować tylko to, że do kolejki dołączyło w tym czasie co najmniej 200 osób. Podobnie nie można stwierdzić, że między 13^{25} a 13^{35} do kolejki doszło 100 osób, a jedynie, że nie mogło być ich mniej. Nie można stwierdzić, że szeregowy Atkins dostał obiad dokładnie o 13^{30}, a tylko, że nie nastąpiło to później i nie można też stwierdzić, że w ciągu ostatnich pięciu minut nikt do kolejki nie doszedł. W zadaniu uczeń musi też samodzielnie opracować sposób mierzenia tempa wzrostu kolejki w określonym czasie.

Zamiast zakończenia

- Powyższe zadania dotyczą realnych sytuacji, którym są podporządkowane abstrakcyjne pojęcia i reguły matematyczne. Etap ich zastosowania (np. do wykonania obliczeń) jest tylko zwieńczeniem długiego i bogatego w rozmaite operacje intelektualne procesu planowania rozwiązania. Właśnie w ten sposób wykorzystujemy matematykę w codziennym życiu, rozwiązując nie problemy formalne czy sztucznie zmatematyzowane zadania umieszczone w realistycznym kontekście, lecz problemy sytuacyjne, wymagające szerokiego spektrum aktywności.
- Zadawanie uczniom tego typu zadań jest konieczne. W przeciwnym razie w ich świadomości matematyka zawsze będzie się dzielić na dwie niepowiązane części: teoretyczną – nauczaną przez panią w szkole (do której należy zadanie o zakupach Jasia) i tę wykorzystywaną na potrzeby codziennego życia (np. podczas chodzenia na zakupy), chociaż pewnie niewielu uczniów w tym drugim przypadku w ogóle użyłoby określenia „matematyka".
- Nauczyciele nie uświadamiają uczniom, że matematyka odnosi się do rzeczy dobrze im znanych, że nie jest zbiorem abstrakcyjnych reguł i rutynowych algorytmów, i że używanie jej nie sprowadza się do wykonywania standardowych tricków w celu otrzymania odpowiedzi, która nie przedstawia sama w sobie żadnej wartości. Koniecznym jest, aby uczeń dostrzegał, że reguły matematyczne rzeczywiście stosują się do codziennych sytuacji.
- Wprowadzanie uczniów w sztukę stosowania matematyki to proces powolny i długotrwały, ale konieczny, w przeciwnym razie będą na zawsze pozbawieni podstawowego narzędzia poznawania otaczającego świata, jakim jest matematyka, i będą się czuli zagubieni w każdej nowej, z poznawczego punktu widzenia, sytuacji. Dlatego w edukacji matematycznej szczególny nacisk powinien być położony nie na nauczanie formalne, ale sytuacyjne. Jednym ze środków do osiągnięcia tego celu jest kształcenie realistyczne, czyli stawianie przed uczniami problemów silnie osadzonych w codziennej rzeczywistości, wykorzystujących ich pozamatematyczne doświadczenia i odwołujących się w istotny sposób do ich wiedzy o rzeczywistości opisanej w zadaniu.
- Pełny proces rozwiązywania zadania powinien zawierać trzy główne etapy: odkrywania faktów, odkrywania idei, odkrywania rozwiązań. Pierwszy etap polega na wyjaśnianiu istoty zadania, modelowaniu, analizie problemu, sformułowaniu pytań i określeniu celów. Drugi wiąże się z poszukiwaniem i udoskonalaniem pomysłów, testowaniem hipotez, konfrontowaniem narzucającej się odpowiedzi z pełnym ze-

stawem posiadanych danych i informacji. Trzeci to wartościowanie i selekcja metody oraz jej wdrożenie, czyli przeprowadzenie rozwiązania, a także zdroworozsądkowa ocena uzyskanych wyników i wreszcie, tak typowa dla matematyki, tendencja do uogólniania. W tradycyjnie sformułowanych zadaniach proces rozwiązania jest zwykle zubożony, gdyż brak w nim elementów głębszej analizy treści, opracowania planu działania, twórczego poszukiwania metod postępowania i weryfikacji wniosków.

- Charakterystyczne elementy realistycznego stylu nauczania matematyki to: analiza realnej sytuacji określonej nie do końca jasno i precyzyjnie, odwołanie się do zainteresowań ucznia, odwołanie się w istotny sposób do wiedzy o rzeczywistości opisanej w zadaniu, często wykraczającej poza ramy jednej dziedziny nauki, wyabstrahowanie bardziej specyficznego problemu, wybór czynników istotnych dla danego zjawiska, ustalanie danych potrzebnych do rozwiązania zadania, modelowanie problemu (przyjęcie dodatkowych założeń), matematyzacja problemu (sformułowanie go w języku matematyki), rozwiązanie problemu matematycznego przy zastosowaniu rozmaitych strategii, interpretacja otrzymanych wyników w sytuacji wyjściowej, możliwość zadawania dalszych pytań.
- Taki styl pracy wykorzystuje naturalną ciekawość dziecka, umożliwia gromadzenie doświadczeń w zakresie metodologii dokonywania odkryć, pozwala używać starej wiedzy w nowych sytuacjach. Może przynieść wiele satysfakcji i uczniom, i nauczycielowi. Jego widomym efektem jest to, że uczniowie sami zaczynają dostrzegać wokół siebie i stawiać nowe problemy. Stają się matematykami.

2. O wspomaganym technologicznie odkrywaniu twierdzeń

Piotr Zarzycki, Gdańsk

Najskuteczniejszym sposobem poznawania przez dziecko otaczającego je świata jest jego bezpośrednie eksplorowanie (choć czasem boleśnie ukłuje, oparzy, popsuje się). Podobnie (i czasem równie boleśnie) jest z poznawaniem matematyki. To właśnie pozostawienie uczniom dużej samodzielności motywuje ich do poznawania jej tajemnic. To, co uczeń odkrył samodzielnie, pozostawia w jego umyśle trwały ślad i daje pewność, że w razie potrzeby będzie potrafił dokonać tego samego odkrycia na nowo, zamiast odtwarzać mechaniczne procesy i zapamiętywać skomplikowane algorytmy. Poniżej przedstawiamy eksperymenty numeryczne i algebraiczne (w tym eksperymenty z funkcjami), które pozwalają uczniom poczuć taką właśnie swobodę, oswoić się z nią i nauczyć się z niej mądrze korzystać (żeby za często i za mocno nie bolało).

Czym jest odkrycie w matematyce?

Definiowanie, opisywanie, a zwłaszcza algorytmizowanie procesu odkrywania wydaje się zajęciem karkołomnym. Bardzo ciekawie o odkryciach matematycznych pisze francuski matematyk Jacques Hadamard w „Psychologii odkryć matematycznych" (PWN, 1964), przytaczając tam między innymi anegdotę o Newtonie, który zapytany o to, jak odkrył prawo powszechnego ciążenia, podobno odpowiedział: przez ciągłe myślenie.

Mimo trudności, odkrywanie własności obiektów, prawidłowości procesów i twierdzeń matematycznych można w szkolnej praktyce rozpatrywać w kilku aspektach:
- eksperymentowanie, czyli odkrywanie sensu stricte,
- praca nad problemami, które w naturalny sposób mogą być uogólnione,
- praca nad trudnymi zadaniami, w odniesieniu do których nie narzuca się żadna metoda postępowania,
- praca nad problemami związanymi ze specyfiką programu komputerowego lub środowiska programistycznego.

Pokrótce zajmę się każdym z nich.

Wspólną cechą wszystkich podawanych przeze mnie przykładów będzie praca według poniższego schematu, składającego się z czterech faz:

EKSPERYMENTY → **H**IPOTEZY → **D**OWODY → **U**OGÓLNIENIA

Użycie liczby mnogiej jest zamierzone. Odkrycie nowej wiedzy wymaga bowiem wielokrotnego powtarzania doświadczeń, narzucająca się hipoteza może się okazać błędna i wymagać modyfikacji, a pierwsze próby dowodowe są zazwyczaj mało doskonałe i wymagają wielu uzupełnień oraz poprawek.

Nie do przecenienia jest ostatnia faza, w której uczeń postawiony jest w bardzo nietypowej sytuacji. Zazwyczaj to on jest adresatem pytań formułowanych przez nauczyciela, podręcznik czy arkusz egzaminacyjny. Tym razem staje się podmiotem stawiającym nowe problemy badawcze, wytyczającym kierunek własnej pracy.

Choć pojęcie eksperymentu wydaje się bliższe raczej naukom przyrodniczym niż ścisłym, to faza eksperymentowania pojawia się w pracy każdego matematyka, nawet gdy zajmuje się najbardziej abstrakcyjnymi teoriami. Uczeń eksperymentujący na lekcji matematyki znajduje się w autentycznej sytuacji badawczej. Jest to ciekawe wyzwanie, ale i duża trudność dla niewprawionego umysłu, dlatego nie można pozostawić go samemu sobie.

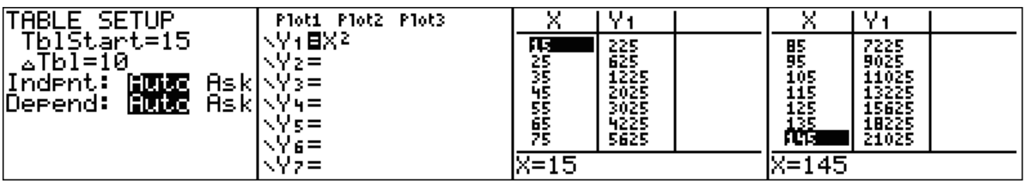
Pomoc uczniowi w samodzielnym (częściowo lub całkowicie) odkrywaniu matematyki jest bardzo trudnym zadaniem. Ułatwiają je własne wcześniejsze doświadczenia w tym zakresie, a także wykorzystanie technologii. Dzięki niej matematyczne eksperymenty nie są żmudne i dają więcej przesłanek do postawienia hipotez.

Sprytne podnoszenie do kwadratu

Już w szkole podstawowej można podjąć trud odkrywania i dowodzenia pewnych faktów arytmetycznych. Poniższe zadanie dotyczy wynalezienia algorytmu szybkiego podnoszenia do kwadratu liczb o szczególnych własnościach.

Jak można szybko podnosić do kwadratu liczby naturalne, których ostatnią cyfrą jest 5?

(**E**) Rozpoczynamy oczywiście od eksperymentów numerycznych z kalkulatorem lub arkuszem kalkulacyjnym, gromadząc potrzebne dane i przyglądając się im. Mając do dyspozycji kalkulator graficzny, można postąpić na przykład tak jak ilustrują to zrzuty ekranu z rysunku 1.

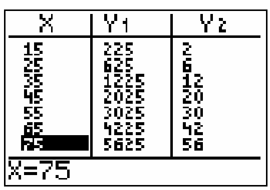


Rys. 1

(**H**) Obserwując tabelę wyników, uczniowie powinni odkryć, że wszystkie kwadraty:

- kończą się na 25,
- zaczynają się iloczynem liczby poprzedzającej cyfrę 5 i liczby o 1 od niej większej.

Pierwszy wniosek narzuca się sam. Gdyby uczniowie mieli kłopoty z drugim, można sporządzić dodatkową tabelkę, w której oprócz kwadratów podano liczby powstałe z nich przez odrzucenie końcówki 25 (rys. 2).



Rys. 2

(**D**) Dowód poprawności odkrytego algorytmu jest oparty na interpretacji następujących tożsamości algebraicznych: $(10x+5)^2 = 100x^2+100x+25 = 100x(x+1)+25$.

(**U**) Teraz uczniowie mogą się zastanawiać nad podobnymi algorytmami szybkiego podnoszenia do kwadratu liczb naturalnych z ostatnią cyfrą na przykład 1 lub 3. W czasie prowadzonych przeze mnie zajęć nigdy nie zdarzyło się, aby nie znalazło się chociaż kilka osób, które samorzutnie podjęłyby takie próby na poziomie manipulacji algebraicznych.

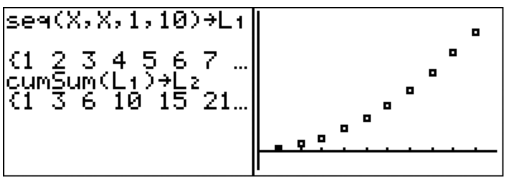
Więcej przykładów dotyczących używania kalkulatora do prowokowania matematycznych odkryć można znaleźć w pozycjach [1] i [2] podanych na końcu rozdziału.

Sumy potęg kolejnych liczb naturalnych

Poniższe zadanie jest zapewne wszystkim dobrze znane. Proponuję jednak dość niekonwencjonalne podejście do jego rozwiązania na poziomie gimnazjalnym. W tekście przyjmujemy, że zero nie jest liczbą naturalną.

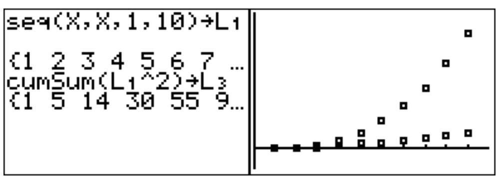
Ile wynosi suma n początkowych liczb naturalnych? A suma ich kwadratów? A sześcianów?

(**E**) Obliczenia wartości kolejnych sum (liczb naturalnych, ich kwadratów i sześcianów) wykonujemy na kalkulatorze lub w arkuszu kalkulacyjnym, a następnie pary liczb postaci (n, $1+2+3+\ldots+n$) zaznaczamy w układzie współrzędnych (analogicznie postępujemy z kwadratami i sześcianami). Mając do dyspozycji kalkulator graficzny, można postąpić na przykład tak, jak ilustrują to zrzuty ekranu z rysunków 3–5.



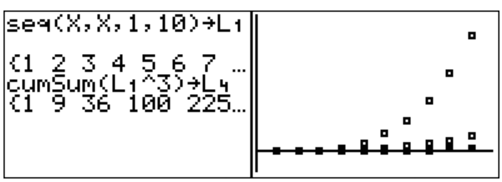
Rys. 3

Punkty o współrzędnych (n, $1+2+3+\ldots+n$) dla $n\in\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$



Rys. 4

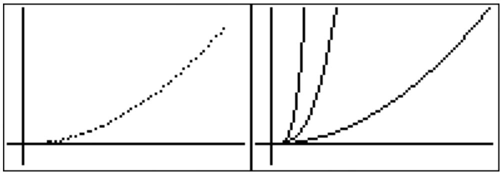
Punkty o współrzędnych (n, $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$) dla $n\in\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$



Rys. 5

Punkty o współrzędnych (n, $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$) dla $n\in\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$

(**H**) Obserwując otrzymane wykresy i analizując ich własności, uczniowie powinni odkryć, że są to funkcje wielomianowe zmiennej n (pojęcie wielomianu nie występuje w programie matematyki w gimnazjum, niemniej uczniom zdolnym na pewno warto je przybliżyć). A dokładniej, że funkcja $f(n) = 1+2+...+n$ jest zależnością kwadratową, $g(n) = 1^2+2^2+...+n^2$ – sześcienną, a $h(n) = 1^3+2^3+...+n^3$ jest wielomianem czwartego stopnia. Widać to wyraźniej, jeśli zamiast 10 punktów rozpatrzymy ich na przykład 50 (rys. 6a) lub gdy wszystkie funkcje wyświetlimy jednocześnie (rys. 6b).

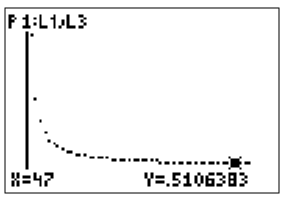


a) b)

Rys. 6

Powyższe hipotezy musimy jednak sformułować precyzyjniej. W tym celu wspólnie z uczniami zastanawiamy się, jakie współczynniki liczbowe występują w wielomianach reprezentujących funkcje f, g i h. Możemy to badać różnymi metodami. Pokażemy dwie z nich.

1) Aby znaleźć współczynnik a funkcji $f(n) = an^2+bn+c$, wykonajmy dzielenie przez n w najwyższej potędze, w jakiej występuje w tym wzorze. Otrzymamy nową funkcję $f_1(n) = \frac{f(n)}{n^2}$, której wykres dla $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ przedstawia rysunek 7. Widać, że dla dużych n, wartości funkcji wyraźnie stabilizują się w pobliżu pewnej liczby, którą można łatwo odczytać. Z drugiej strony intuicyjnie jest zrozumiałe, że wartości $f_1(n) = a+b/n+c/n^2$ dla dużych n są w przybliżeniu równe a (gdyż b/n i c/n^2 są wtedy bliskie 0). W ten sposób znaleźliśmy hipotetyczną wartość współczynnika a równą 1/2.

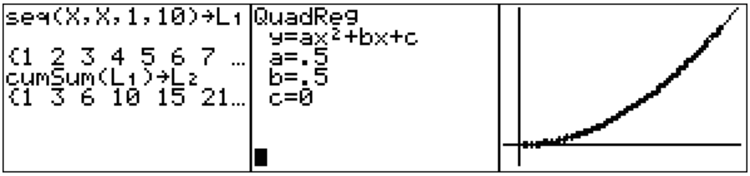


Rys. 7

Następnie zajmujemy się funkcją $f_2(n) = \frac{f_1(n)-½n^2}{n}$ i – podobnie jak wcześniej – znajdujemy $b = ½$, a na koniec funkcją $f_3(n) = f_1(n)-½n^2-½n$, otrzymując $c = 0$. Mamy więc hipotezę, że $f(n) = ½n^2+½n$.

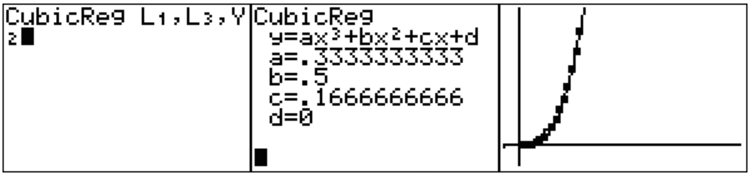
Podobna procedura zastosowana do funkcji $g(n)$ daje wynik $(1/3)n^3+(1/2)n^2+(1/6)n$, a zastosowana do $h(n)$ daje $(1/4)n^4+(1/2)n^3+(1/4)n^2$. Tak więc hipotezy mamy gotowe.

2) Do wyznaczenia równań funkcji f, g i h można też użyć krzywych regresji, czyli funkcji, które w danej klasie, na przykład wielomianów kwadratowych, sześciennych lub czwartego stopnia, najlepiej pasują do danego układu punktów. Korzystamy z wbudowanej w kalkulator komendy pozwalającej automatycznie takie funkcje znajdować (choć w pracy z grupą uczniów zainteresowanych matematyką warto się pokusić o większą precyzję i zapoznać ich z metodą najmniejszych kwadratów, na której opiera się znajdowanie krzywych regresji). Uzyskane w ten sposób wyniki (przedstawione na rys. 8–10) możemy porównać z tymi znalezionymi poprzednią metodą.



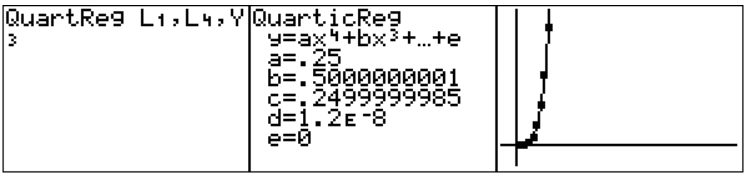
Rys. 8

Regresja kwadratowa dla funkcji $f(n)$



Rys. 9

Regresja sześcienna dla funkcji $g(n)$

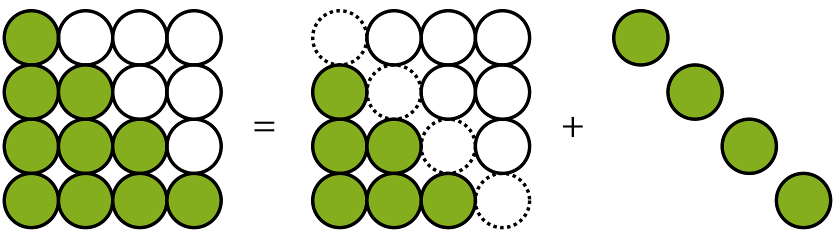


Rys. 10

Regresja wielomianowa stopnia czwartego dla funkcji $h(n)$

Przekształcając otrzymane wzory, otrzymujemy ostatecznie: $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ oraz $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

(**D**) Istnieje wiele dowodów powyższych tożsamości. W liceum najczęściej wykorzystuje się w nich zasadę indukcji matematycznej. Warto jednak zaprezentować uczniom inny typ rozumowania, tak zwane dowody przez interpretację geometryczną. Rysunek 11 przedstawia takie właśnie uzasadnienie pierwszej tożsamości dla $n = 4$.



Rys. 11

$1+2+3+\ldots+n = (n^2-n)/2+n = n(n-1)/2$

Dowody podobnego typu pozostałych dwóch tożsamości można znaleźć na przykład w [3].

(**U**) Badanie sum liczb naturalnych, ich kwadratów i sześcianów powinno doprowadzić uczniów do wniosku, że suma $1^k+2^k+\ldots+n^k$, gdzie $k\in \mathrm{N}$ jest wielomianem stopnia $k+1$ zmiennej n, a współczynnik przy zmiennej w najwyższej potędze wynosi $1/(k+1)$. Podobne zagadnienie badał w XVIII wieku szwajcarski matematyk Jakub Bernoulli. Rozpatrywał on sumy $0^k+1^k+2^k+\ldots+(n-1)^k$ i odkrył, że można je zapisać jako $\frac{1}{k+1}\left(B_0n^{k+1}+\binom{k+1}{1}B_1n^k+\ldots+\binom{k+1}{k}B_kn\right)$, przy czym współczynniki B_0, B_1, …, B_k, zwane dziś liczbami Bernoulliego, odgrywają ważną rolę w teorii liczb. W szczególności posłużyły Kummerowi do rozstrzygnięcia rozwiązalności równania Fermata dla tak zwanych liczb pierwszych regularnych.

Równanie diofantyczne

Kolejne zadanie jest dość trudne. Pochodzi z Olimpiady Matematycznej z 1998 roku.

Znajdź wszystkie rozwiązania w liczbach całkowitych równania $x^2+3y^2 = 1998x$.

(**E**) Krzywa o równaniu $x^2+3y^2 = 1998x$ to elipsa, zatem może przechodzić tylko przez skończenie wiele punktów kratowych o współrzędnych całkowitych. Możemy istotnie zawęzić obszar poszukiwań, zauważając że x musi być nieujemne i spełniać nierówność $x \le 1998$, co daje oszacowanie y przez nierówność $|y| \le \sqrt{3\cdot 1998/6} \approx 1153$ (które można jeszcze poprawić do $|y| \le \sqrt{3\cdot 333} \approx 573$).

Oto rozwiązanie „maszynowe" (w programie DERIVE), dzięki któremu wyłuskano rozwiązania.

#1: $f(x) := \sqrt{\left(\dfrac{1998\cdot x - x^2}{3}\right)}$

```
#2:    g(x) := MOD(f(x))

       h(x) :=
         If g(x) = 0
#3:         x
            1

#4:    VECTOR(h(x), x, 0, 1998)

#5:    [0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,
```

Funkcja $g(x)$ to część ułamkowa $f(x)$, zatem x jest rozwiązaniem całkowitym rozpatrywanego równania, o ile $g(x) = 0$. Pozycja #5 zawiera 27 początkowych wyników dla $x\in\{0, 1, \ldots, 26\}$. Oczywiście program wyświetlił je wszystkie.

„Ręczne" poszukiwanie wartości x, dla których $f(x)$ jest całkowite, można zautomatyzować za pomocą następującej operacji na wektorach: $[a, b, c, \ldots, d] \rightarrow \begin{cases}[b, c, \ldots, d, a], & \text{gdy } g(a) = 0\\ [b, c, \ldots, d], & \text{gdy } g(a) \neq 0\end{cases}$. W efekcie (widocznym poniżej) otrzymujemy cztery rozwiązania w liczbach całkowitych nieujemnych i jeszcze dwa rozwiązania z ujemnymi wartościami zmiennej y: (648, -540), (1350, -540).

```
       s(v) :=
         If v↓1 = 1
#5:         DELETE_ELEMENT(v, 1)
            APPEND(DELETE_ELEMENT(v, 1), [v↓1])

#6:    w := VECTOR(h(x), x, 0, 1998)

#7:    r := ITERATE(s(v), v, w, 1999)

#8:                                          r := [0, 648, 1350, 1998]
```

#9: $\text{rozw} := \text{VECTOR}\left(\left[r_i,\ f(r_i)\right],\ i,\ 1,\ \text{DIM}(r)\right)$

#10: $\text{rozw} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 648 & 540 \\ 1350 & 540 \\ 1998 & 0 \end{bmatrix}$

Właściwie w tym momencie można zakończyć rozwiązywanie zadania, gdyż wszystkie pierwiastki całkowite równania $x^2+3y^2 = 1998x$ zostały znalezione. Powstaje jednak pytanie, czy powyższe postępowanie stanowi dowód, czy jest jedynie sposobem na postawienie hipotezy.

(**D**) Warto przeprowadzić z uczniami dyskusję na temat potrzeby rozwiązania „niemaszynowego". Może się ono opierać na spostrzeżeniu, że jeśli para (x, y) jest rozwiązaniem danego równania, to obie liczby x i y są podzielne przez 3. Biorąc to pod uwagę, otrzymujemy nowe równanie $x_1^2+3y_1^2 = 666x_1$, gdzie $x = 3x_1$ i $y = 3y_1$. I znowu zauważamy, że x_1 i y_1 są podzielne przez 3. Kontynuując poprzednie postępowanie, dochodzimy do równania $x_3^2+3y_3^2 = 74x_3$, które też można uprościć, zauważając że x_3 i y_3 są parzyste. Wtedy pozostaje do rozwiązania równanie $x_4^2+3y_4^2 = 37x_4$, co przy ograniczeniach nałożonych na zmienne dość szybko prowadzi do znalezienia rozwiązań: (0, 0), (12, 10), (25, 10), (37, 0), (12, –10) i (25, –10).

(**U**) Istotą zaprezentowanego rozumowania arytmetycznego jest szczególna podzielność współczynników równania, podczas gdy wypracowana metoda numerycznego poszukiwania rozwiązań pozwala zająć się równaniami typu $x^2+3y^2 = kx$, dla dowolnych $k \in \mathrm{N}$.

Dotychczasowe przykłady pokazują, że istotę rozwiązywania zadań matematycznych za pomocą komputerów lub kalkulatorów (czy ogólnie za pomocą technologii) dobrze ilustruje następujący diagram:

PRZEKŁAD ZADANIA → WPROWADZENIE DANYCH → ZEBRANIE WYNIKÓW →
→ INTERPRETACJA WYNIKÓW/HIPOTEZA → DOWÓD → UOGÓLNIENIA

Szczególnie istotnym elementem tego procesu jest przekład zadania, czyli konieczność wyrażenia badanych obiektów w języku zrozumiałym dla programu komputerowego. Bardzo rzadko występuje on w innych podejściach do rozwiązywania problemów, a kształtuje ważną umiejętność matematyzacji i właśnie to stanowi jedną z największych zalet nauczania matematyki za pomocą technologii.

Zadania o ciągach

Oto dalsze przykłady zadań (już bez szczegółowego omówienia), które mogą być rozwiązane za pomocą kalkulatora lub odpowiedniego programu komputerowego. Zadania te dobitnie podkreślają zalety wspomaganej technologiami pracy nad zadaniami matematycznymi: konieczność wyrażenia problemu w języku używanej technologii, szybkość i liczba wykonywanych obliczeń dających wiele przesłanek do postawienia trafnej hipotezy, uproszczenie metod rozwiązania i obniżenie progu trudności problemu do poziomu przeciętnie uzdolnionego ucznia, możliwość szybkiej weryfikacji postawionej hipotezy.

Pierwsze zadanie pochodzi z Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej z 2005 roku.

Niech $a_n = 2^n+3^n+6^n-1$. *Wyznacz wszystkie liczby naturalne względnie pierwsze z każdym wyrazem tego ciągu.*

Można wykorzystać program DERIVE do sprawdzenia, ile wynoszą reszty z dzielenia kolejnych wyrazów ciągu $\{a_n\}$ przez różne liczby pierwsze. Po zbadaniu kilkunastu przypadków liczb pierwszych p okazało się, że jeśli $p \neq 2$ i $p \neq 3$, to $p \mid a_{p-2}$. Ta odkryta eksperymentalnie własność w istotny sposób przyczyniła się do podania odpowiedzi: jedyną liczbą względnie pierwszą z każdym wyrazem rozpatrywanego ciągu jest 1.

A oto kolejny przykład.

Niech $a_1 = 14$, $b_1 = -6$, $a_{n+1} = 3a_n+b_n$, $b_{n+1} = -a_n+b_n$ *dla* $n \geq 1$. *Znajdź wzory jawne na* a_n *i* b_n.

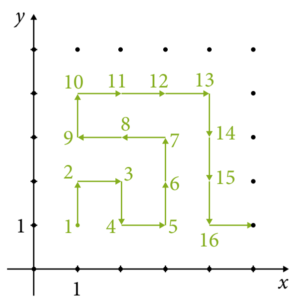
W programie MATHEMATICA poszukiwania można prowadzić w następujący sposób:

```
In[1]:= f[{x_, y_}] := {3 x + y, -x + y}

In[2]:= NestList[f, {14, -6}, 10]

Out[2]= {{14, -6}, {36, -20}, {88, -56}, {208, -144}, {480, -352}, {1088, -832},
  {2432, -1920}, {5376, -4352}, {11 776, -9728}, {25 600, -21 504}, {55 296, -47 104}}

In[3]:= FactorInteger[%]

Out[3]= {{{{2, 1}, {7, 1}}, {{-1, 1}, {2, 1}, {3, 1}}},
  {{{2, 2}, {3, 2}}, {{-1, 1}, {2, 2}, {5, 1}}},
  {{{2, 3}, {11, 1}}, {{-1, 1}, {2, 3}, {7, 1}}},
  {{{2, 4}, {13, 1}}, {{-1, 1}, {2, 4}, {3, 2}}},
  {{{2, 5}, {3, 1}, {5, 1}}, {{-1, 1}, {2, 5}, {11, 1}}},
  {{{2, 6}, {17, 1}}, {{-1, 1}, {2, 6}, {13, 1}}},
  {{{2, 7}, {19, 1}}, {{-1, 1}, {2, 7}, {3, 1}, {5, 1}}},
  {{{2, 8}, {3, 1}, {7, 1}}, {{-1, 1}, {2, 8}, {17, 1}}},
  {{{2, 9}, {23, 1}}, {{-1, 1}, {2, 9}, {19, 1}}},
  {{{2, 10}, {5, 2}}, {{-1, 1}, {2, 10}, {3, 1}, {7, 1}}},
  {{{2, 11}, {3, 3}}, {{-1, 1}, {2, 11}, {23, 1}}}}
```

Po przełożeniu na typową symbolikę otrzymujemy:
$a_1 = 2{\cdot}7$, $a_2 = 2^2{\cdot}3^2$, $a_3 = 2^3{\cdot}11$, $a_4 = 2^4{\cdot}13$, $a_5 = 2^5{\cdot}3{\cdot}5 = 2^5{\cdot}15$, $a_6 = 2^6{\cdot}17$
$b_1 = -2{\cdot}3$, $b_2 = 2^2{\cdot}5$, $b_3 = 2^3{\cdot}7$, $b_4 = 2^4{\cdot}9$, $b_5 = 2^5{\cdot}11$, $b_6 = 2^6{\cdot}13$
Prawidłowość jest ewidentna: $a_n = 2^n{\cdot}(2n+5)$, $b_n = 2^n{\cdot}(2n+1)$.

Poniższe zadanie rozwiązywałem z uczniami I klasy III LO w Gdyni.

Diagram poniżej ilustruje równoliczność zbiorów $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *oraz* $\mathbb{N}$. *Podaj wzór jawny funkcji* $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, *której ten diagram odpowiada, to znaczy takiej, że* $f(1, 1) = 1$, $f(1, 2) = 2$, $f(2, 1) = 4$, $f(3, 1) = 5$ itd.



Rys. 12

Jedna z uczennic po tygodniu przyniosła rozwiązanie. Fragment jej notatek prezentujemy poniżej.

W pracy tej jest spory potencjał, chociaż są też poważne błędy. Programy komputerowe dają możliwość uporządkowania chaotycznych rozwiązań i weryfikacji ich poprawności.

W ostatniej macierzy widoczne są wartości funkcji pokazanej na rysunku 12. Uzyskaliśmy tu komputerowe potwierdzenie, że pomysł uczennicy był dobry, a konieczność poprawnego zaimplementowania definicji funkcji do programu „zmusiła" uczennicę do naniesienia poprawek w jej pierwotnej definicji.

$n \to \{x, y\} \qquad s = (\max(y,x))^2 - \max(y,x) + 1$

$$f(n) = \begin{cases} \text{Dla } x = y \Rightarrow n = x^2 - x + 1 \\ \text{Dla } \max(y,x) = 2k, k \in N; x \neq y; x > y \Rightarrow s + |x-y| = n \\ \text{Dla } \max(y,x) = 2k\ k \in N; x \neq y; x < y \Rightarrow s - |x-y| = n \\ \text{Dla } \max(y,x) = 2k+1 \ \text{—||—}\ ; x > y \Rightarrow s - |x-y| = n \\ \text{Dla } \text{——||——} \qquad ; x < y \Rightarrow s + |x-y| = n \end{cases}$$

np. Dla $\underset{x}{2} ; \underset{y}{4}$ $\quad \max(y,x) = 2k, x < y \Rightarrow n = 13 - \cancel{1}\cancel{7}^{2} = 11$

$s = 16 - 4 + 1 = 13$

Dla $8 ; 4$ $\quad \max(y,x) = 2k, x > y \Rightarrow n = 57 + 4 = 61$

$s = 64 - 8 + 1 = 57$

Dla $\underset{x}{11}\ \underset{y}{5}$

$s = 121 - 11 + 1 = 111 \quad \max(y,x) = 2k+1, x > y \Rightarrow n = 111 - 6 = 105$

Rys. 13

```
                    2
#1:   s(x, y) := MAX(x, y)  - MAX(x, y) + 1

      martyna(x, y) :=
        If x = y
          x^2 - x + 1
          If x > y ∧ MOD(MAX(x, y), 2) = 0
            s(x, y) + ABS(x - y)
#2:         If x < y ∧ MOD(MAX(x, y), 2) = 0
              s(x, y) - ABS(x - y)
              If x > y ∧ MOD(MAX(x, y), 2) = 1
                s(x, y) - ABS(x - y)
                s(x, y) + ABS(x - y)

#3:   VECTOR(VECTOR(martyna(x, y), x, 1, 5), y, 1, 5)
```

#4: $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 16 & 17 \\ 2 & 3 & 6 & 15 & 18 \\ 9 & 8 & 7 & 14 & 19 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 20 \\ 25 & 24 & 23 & 22 & 21 \end{bmatrix}$

Nowy typ zadań matematycznych

We wszystkich wcześniejszych przykładach punktem wyjścia był problem matematyczny, który znacząco dało się uprościć, dzięki zastosowaniu technologii. Pokażemy, że może być także na odwrót: otóż próba „nauczenia” kalkulatora lub komputera, jak tworzyć pewne obiekty matematyczne, czyli przekład zadania z języka matematyki na język kalkulatora lub programu komputerowego, może sam w sobie stanowić ciekawy problem do rozwiązania. Często bowiem to, co wydaje się łatwe do pokazania choćby na odręcznym rysunku, może być trudne do wykonania za pomocą technologii. Oto przykład:

Zapisz macierz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, *używając:*

a) komendy vector *w programie DERIVE,*

b) komend seq *i* List→matr *w kalkulatorze graficznym.*

W programie DERIVE komenda jest krótka.

```
VECTOR(VECTOR(3·i + j, j, 1, 3), i, 0, 2)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Stworzenie rozpatrywanej macierzy w języku na przykład kalkulatora TI-84 jest bardziej skomplikowane i wymaga pewnej sprawności w operowaniu obiektami matematycznymi, które są dostępne w menu. Sposób postępowania pokazują poniższe zrzuty ekranów.

```
seq(X,X,1,7,3)→L1
          {1 4 7}
seq(X,X,2,8,3)→L2
          {2 5 8}
```

```
          {2 5 8}
seq(X,X,3,9,3)→L3
          {3 6 9}
List▸matr(L1,L2,
L3,[A])
             Done
```

```
List▸matr(L1,L2,
L3,[A])
             Done
[A]
       [[1 2 3]
        [4 5 6]
        [7 8 9]]
```

Rys. 14

Zamiast zakończenia

- Istnieje ogromna liczba przykładów matematycznych zadań, w których stosowanie technologii nie tylko ułatwia znalezienie rozwiązania, ale rozwija umiejętności badawcze uczniów, kształtując ich twórczy potencjał.
- Technologie, dzięki ogromnej mocy obliczeniowej, pozwalają się skoncentrować wyłącznie na poszukiwaniu prawidłowości, stawianiu hipotez czy dowodzeniu; to znaczy czarną robotę wykonuje kalkulator lub komputer.
- Maszynowe rozwiązywanie matematycznych zadań często się wiąże z koniecznością napisania programu, który automatycznie wykonuje na przykład obliczenia.
- Technologie umożliwiają zaprojektowanie matematycznych symulacji, na podstawie których można uzyskać rozwiązanie problemu, na przykład słynne zadania Buffona o igle.
- Technologie umożliwiają wizualizację rozwiązań. Zaplanowanie takiej wizualizacji wymaga czasami sporej wiedzy matematycznej.
- Należy podkreślić, że używanie komputerów do wykrywania prawidłowości i stawiania hipotez nie zwalnia z potrzeby przeprowadzania dowodów. Dopiero przedstawienie dedukcyjnego uzasadnienia odkrytego faktu powoduje, że zadanie jest rozwiązane prawidłowo.

Literatura

[1] Zarzycki P., Orzeszek A., Kierznikowicz A. i wsp. *Lekcje matematyki z kalkulatorem graficznym w gimnazjum. Książka dla nauczyciela*, Edukacja z TI, 2004.

[2] Orzeszek A., Zarzycki P. (red.), *Lekcje matematyki z kalkulatorem graficznym,* Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 2003.

[3] Nelsen R.B., *Proofs without words*, MAA, 1993.

3. O nauczaniu metodą projektu edukacyjnego

Małgorzata Mikołajczyk, Wrocław

Aby pracować jakąś metodą, trzeba być do niej przekonanym, rozumieć jej cele i mechanizmy. Istotą pracy metodą projektu jest edukacja interdyscyplinarna, a także odwoływanie się do zjawisk codziennego życia, odkrywanie rządzących nimi prawidłowości i ich badanie. Opisane we wcześniejszych rozdziałach nauczanie realistyczne i problemowe stanowią przygotowanie ucznia do realizowania projektu, a w dalszej perspektywie – do samodzielnej pracy badawczej. W tym rozdziale omówimy zasady interdyscyplinarności nauczania, zdefiniujemy, czym są zadania projektowe, wskażemy ich przykłady i opiszemy narzędzia ułatwiające ich realizację.

Kształcenie interdyscyplinarne

Interdyscyplinarność jest najbardziej naturalnym sposobem przekazywania wiedzy. Dziecko postrzega otaczający je świat jako całość, w taki sposób uczy się w domu i od najmłodszych lat poznaje swoje otoczenie. Dopiero szkoła narzuca mu podział na poszczególne dyscypliny, wskutek czego wiedza zostaje poszufladkowana, a uczeń sam nie potrafi stworzyć powiązań między różnymi jej fragmentami. Dlatego integracja wiedzy stała się jednym z kluczowych założeń reformy oświaty. Realizowana jest nie tylko przez nauczanie zintegrowane na pierwszym etapie edukacyjnym i blokowe testowanie umiejętności po szkole podstawowej, ale także przez tworzenie ścieżek międzyprzedmiotowych, projektowanie integrujących wiedzę podręczników i programów nauczania oraz zalecaną pracę metodą projektu edukacyjnego.

Integracja treści przedmiotowych z matematyki jest możliwa na styku z każdym innym przedmiotem szkolnym, gdyż metody matematyczne stanowią podwalinę metodologii właściwie wszystkich innych nauk. Często o pełnym zrozumieniu jakiegoś zjawiska mówi się dopiero wtedy, gdy umiemy je opisać i wyjaśnić formułami matematycznymi. Dlatego w nauczaniu ważne jest wyrobienie umiejętności opisywania zjawisk przyrodniczych i społecznych w języku matematyki i wykorzystania jej metod do rozwiązywania problemów z różnych dziedzin wiedzy. Takie podejście skłania ucznia do bacznej obserwacji otaczającego go świata i poznawczej refleksji nad jego zjawiskami, pozwala powiązać wiadomości matematyczne z całością wiedzy zdobywanej w szkole, ukazywać aplikacyjne aspekty matematyki w różnych dziedzinach życia i działalności poznawczej.

Korelacja międzyprzedmiotowa

Integracji wiedzy szkolnej nie należy mylić ze zwykłą korelacją międzyprzedmiotową. Problem nie jest wcale nowy. Zacytuję tu fragment broszury z 1932 roku pt. „Jak realizować nowe programy szkolne": „Na lekcji polskiego – czytanka o pszczołach, na lekcji przyrody – pszczoła, na lekcji rachunków – zadanie o pszczołach, a na śpiewie – piosenka o pszczółce. [...] Próby te najczęściej sztuczne, nie tylko nie przynoszą oczekiwanych korzyści, ale często wprowadzają do lekcji nudę". Nic dziwnego, że tak sztucznie stosowana korelacja przedmiotów szkolnych budzi sprzeciw. Stanowi jaskrawe wypaczenie zasady interdyscyplinarności w imię realizacji wytycznych i haseł programowych samych w sobie, a nie harmonijnego, naturalnego i wszechstronnego rozwoju ucznia.

Celem nauczania interdyscyplinarnego jest postrzeganie i opisywanie zarówno bogactwa, jak i jedności otaczającego nas świata, a korelacja powinna być narzędziem osiągania tego celu tylko wtedy, gdy zachodzi istotna i uzasadniona, a nie fikcyjna potrzeba jej wprowadzenia. Stanowi wtedy niezwykle cenną metodę pobudzania motywacji uczniów, pozwala na indywidualizację tempa pracy i zakresu wymagań w zależności od możliwości i zainteresowań ucznia, na poznanie danego zjawiska w sposób ciągły, kompleksowy, wieloaspektowy, różnymi zmysłami i poprzez różne aktywności.

Oto dwa przykłady właściwej realizacji korelacji międzyprzedmiotowej w szkole podstawowej. Prowadzone we współpracy między nauczycielami wszystkich przedmiotów stanowią przygotowanie do realizacji projektów edukacyjnych w gimnazjum oraz prowadzenia samodzielnych uczniowskich prac badawczych w szkole ponadgimnazjalnej.

Zima

- **język polski** – baśń Hansa Christiana Andersena *Królowa śniegu* – słuchowisko, fragmenty filmu, teatrzyk samorodny; czytanie i analiza wybranych fragmentów opowiadań Aliny i Czesława Centkiewiczów;
- **przyroda** – jak wygląda u nas zima, czym się różni od innych pór roku, co robią wtedy ludzie i zwierzęta – pogadanka, wycieczka do lasu i badanie tropów zwierząt; skąd się biorą pory roku, kiedy występują w różnych częściach ziemskiego globu – demonstracja na globusie; gdzie się znajdują strefy polarne, gdzie leżą Antarktyda i Arktyka, czy są zamieszkałe, jak wygląda życie ich mieszkańców, fauna, flora, krajobrazy – zdjęcia, filmy, spotkanie z polarnikiem;
- **matematyka** – obserwacja i szkicowanie płatków śniegu, badanie ich symetrii, pojęcia symetrii osiowej, środkowej i obrotowej, projektowanie płatków o zadanej symetrii, metody uzyskiwania obiektów o danej symetrii – eksperymenty z lustrem, kleksami, wycinaniem, realizacje komputerowe;
- **technika** – wykonanie bezpiecznego lodowiska na szkolnym lub osiedlowym boisku, budowa igloo;
- **wychowanie fizyczne** – sporty zimowe i zabawy na śniegu – zawody saneczkowe, wyścigi zaprzęgów, konkurencje łyżwiarskie, narciarstwo biegowe;
- **sztuka** – *Zima* w muzyce i plastyce na przykładzie cyklu *Cztery pory roku* Antonia Vivaldiego oraz Giuseppe Arcimboldo, konkurs rzeźb ze śniegu;
- **godzina wychowawcza –** podsumowanie i ocena, wystawa prac, wycieczka z kuligiem i ogniskiem.

Góry

- **język polski** – życie i zajęcia górali – pogadanka; gwara góralska – filmy, słuchowiska, opracowanie słowniczka; legendy o górach – czytanie fragmentów prozy, opowiadanie, teatrzyk samorodny, filmy; góry w poezji – czytanie i omawianie fragmentów, recytacja;
- **przyroda** – fauna, flora, krajobrazy gór – zdjęcia, filmy; pochodzenie i rozmieszczenie pasm górskich – globus, mapy, filmy;
- **technika** – potrawy góralskie – zebranie przepisów, przygotowanie kwaśnicy, degustacja;
- **sztuka** – co to jest folklor – pogadanka, motywy góralskie, architektura gór – zdjęcia, filmy; wykonanie elementów stroju góralskiego, ciupag, haftów, malowanie na szkle;
- **wychowanie fizyczne** – wspinaczka skałkowa w terenie lub na sztucznej ścianie, nauka krzesanego;

- **matematyka** – najwyższe szczyty świata, Europy i innych kontynentów, Polski, okolicy zamieszkania – porównywanie, gromadzenie i prezentacja danych, rysowanie w skali;
- **godzina wychowawcza** – podsumowanie i ocena, wystawa prac, wycieczka w góry.

Proponowane aktywności są silnie związane z osią tematyczną i w sposób naturalny umotywowane, a jednocześnie pozwalają rozwijać wiadomości i umiejętności przedmiotowe oraz wyobraźnię i zainteresowania uczniów. Do współpracy przy ich realizacji warto włączyć rodziców, prezentując na przykład ich zawody czy hobby.

Jednak korelacji międzyprzedmiotowej nie należy nadużywać i stosować zbyt często, gdyż grozi to przeciążeniem procesu dydaktycznego i może stać się męczące i nudne. Nie każde hasło programu musi być realizowane w sposób interdyscyplinarny, ponieważ nie każde się do tego nadaje, a do pewnych zadań matematycznych może po prostu zabraknąć okazji.

Zadania interdyscyplinarne

Nauczanie interdyscyplinarne nie musi się przejawiać wyłącznie w przedsięwzięciach dydaktycznych na miarę projektów czy ścieżek międzyprzedmiotowych. Może być z powodzeniem realizowane w pojedynczych zadaniach z autentycznym i głębokim kontekstem międzyprzedmiotowym czy nawet w pojedynczych akapitach podręcznika do matematyki (dotyczących informacji historycznych, astronomiczno-fizycznych, przyrodniczych czy lingwistycznych). Wprowadzenie metody współrzędnych można powiązać z pogadanką o kartografii, o postępie geometrycznym mówić przy okazji bankowości, a obliczenia procentowe stosować do zadań o stężeniach roztworów chemicznych.

Autorzy podręczników do matematyki nie powinni unikać włączania do nich treści z innych dyscyplin, które w naturalny sposób pokazują jej praktyczne aspekty, a odwołując się do pozamatematycznych zainteresowań ucznia, dostarczają motywacji do przyswajania jej metod. Nie każdy uczeń jest w stanie podziwiać piękno czystej matematyki, ale każdy powinien doceniać jej użyteczność. Wydaje się jednak, że tworzenie autentycznych zadań interdyscyplinarnych przychodzi autorom podręczników z trudem. Zadanie takie (podobnie jak zadania realistyczne, o których była mowa wcześniej) musi istotnie wykorzystywać wiedzę ucznia o opisywanym zjawisku, wymagać od niego zdobycia takiej wiedzy (poprzez obserwację, eksperyment czy analizę źródeł) lub wiedza ta powinna być zdobywana w wyniku rozwiązania zadania. Zawsze jednak uczniowie powinni być postawieni przed koniecznością wyboru adekwatnego do problemu aparatu matematycznego, a samo pytanie powinno budzić ich autentyczne zainteresowanie i motywację.

Oto przykład takiego zadania dotyczącego stężeń, w wariancie dla każdego poziomu edukacyjnego. Jego ważnym aspektem jest możliwość oparcia się na eksperymencie, który stanowi punkt wyjścia do zdefiniowania nowego pojęcia lub sformułowania problemu, a następnie poszukiwania jego matematycznego modelu.

Co się stanie z poziomem wody w naczyniu, gdy wrzucimy do niego garść soli, pieprzu, grochu, gwoździ?

Zadanie to stanowi pretekst do wprowadzenia w szkole podstawowej pojęcia objętości i jej własności. Uczniowie mogą swobodnie przewidywać wyniki eksperymentu, a następnie zweryfikować je, wykonując doświadczenia. W tym celu muszą ustalić: wielkości, które będą podlegać pomiarom, jednostki i technikę ich wykonania. Zadanie pozwala dokonać egzemplifikacji różnych typów mieszanin oraz wykazać, że w rzeczywistości (inaczej niż zazwyczaj w matematyce) objętość nie jest miarą addytywną.

W gimnazjum podobne doświadczenia mogą stanowić podstawę nauki o obliczeniach procentowych – uczniowie mogą wykonywać roztwory o danych stężeniach, opracowywać metody określania stężeń danych roztworów i otrzymywać z nich nowe roztwory o pożądanych stężeniach, mogą też badać własności roztworów nasyconych, sporządzać i skalować solomierze, glukometry itp. Z takich laboratoryjnych lekcji matematyki na pewno wyniosą więcej niż z rozwiązywanych „na sucho" zadań o mieszaniu roztworów.

Z kolei w liceum podobne eksperymenty mogą być wstępem do układania równań różniczkowych.

Do 10-litrowego wiadra, w którym są 2 litry wody dopływa w stałym tempie 1 litra na minutę 10-procentowy roztwór soli. Jak zmienia się stężenie soli w wiadrze? Jakie stężenie ma roztwór w momencie, gdy wiadro się napełni?

Proces rozwiązywania tego zadania jest złożony i może łączyć w sobie wiele aktywności nie tylko matematycznych. Rozwiązywanie zadania można zacząć od naszkicowania przewidywanego kształtu krzywej stężenia roztworu (funkcja rosnąca od 0 do 8%), trudno jednak przewidzieć, w jakim tempie wzrasta to stężenie, czy zależy liniowo od czasu i jaką wartość osiąga w chwili napełnienia się wiadra. Kolejnym etapem jest zaplanowanie i wykonanie odpowiedniego eksperymentu, w wyniku którego przebieg krzywej stężenia ustalimy empirycznie. Następnie, bilansując ilość soli w roztworze po czasie t, otrzymujemy wzór analityczny tej krzywej: stężenie soli po czasie $t = \dfrac{\text{ilość soli po czasie } t}{\text{objętość roztworu w chwili } t} = \dfrac{0{,}1t}{2+t}$, a oba wykresy możemy porównać. Nie ma tu jeszcze żadnych równań różniczkowych, ale przecież nie każde zagadnienie fizyczne musi do nich prowadzić. Jednak zadanie to można dowolnie wzbogacać i przedłużać, na przykład przy założeniu, że początkowo w wiadrze znajdował się roztwór soli o znanym stężeniu, można badać, kiedy stężenie przekroczyło 2%, 3%, 4% itd., czy następowało to w równych odstępach czasu, czy coraz szybciej, czy wolniej i wreszcie można się zastanowić, co się dzieje ze stężeniem roztworu, gdy eksperyment trwa dalej, to znaczy gdy roztwór zaczyna się przelewać z wiadra.

Początkowo wydaje się, że to nic nie zmienia, jedynie przy czasie dążącym do nieskończoności, krzywa powinna zbiegać asymptotycznie do 10%. Tak byłoby i w poprzednim przypadku, gdyby wiadro miało nieograniczoną objętość. Ale czy tempo wzrostu stężenia będzie nadal takie samo? Intuicja podpowiada, że nie. Powinno być szybsze, ponieważ wraz z roztworem wylewa się z wiadra woda, która była w nim na początku. Tym razem przeprowadzenie eksperymentu i obliczeń wymaga założenia pewnego modelu teoretycznego.

Załóżmy, że w ciągu każdej minuty tyle samo cieczy wlewa się do wiadra, ile się z niego wylewa, bez żadnych strat i gwałtownego rozchlapywania. Ponadto ciecz bardzo szybko i dokładnie się miesza, tak że jej stężenie jest wszędzie jednakowe. Możemy to uzyskać, wylewając z wiadra chochelkę mieszaniny, dolewając taką samą chochelkę roztworu 10-procentowego, mieszając i powtarzając te czynności od nowa. Niech jedna taka operacja zajmuje czas Δt, a odpowiadającą tej operacji zmianę ilości soli w roztworze oznaczmy przez Δs. Jeśli w ciągu minuty wlewa się 1 litr roztworu, to w czasie Δt powinno się wlewać go Δt litrów, zatem objętość naszej chochelki powinna wynosić właśnie Δt. Wobec tego w jednym cyklu przelewań mamy:

$$\Delta s = \text{ilość soli dolanej} - \text{ilość soli odlanej} = 0{,}1\Delta t - \square\Delta t = 0{,}1\Delta t - \frac{s(t)}{10}\Delta t,$$

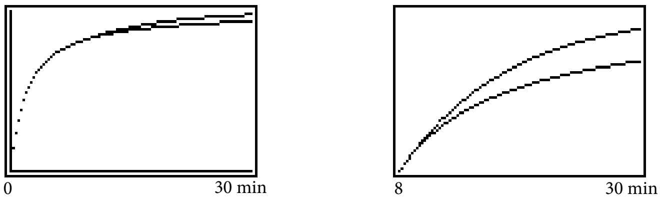
stężenie wlewanego roztworu   stężenie aktualnie wylewanej mieszaniny

gdzie $s(t)$ oznacza ilość soli w wiadrze w chwili t.

Gdy równanie to podzielimy stronami przez Δt otrzymamy: $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = 0{,}1 - \dfrac{s(t)}{10} = 0{,}1[1 - s(t)]$.

Jeśli zaś eksperyment będziemy przeprowadzać nieskończenie małą chochelką ($\Delta t \to 0$), to otrzymamy: $s'(t) = 0{,}1[1-s(t)]$. Zatem funkcja opisująca stężenie roztworu w wiadrze to $s(t)/10$, przy czym funkcję s trzeba wyznaczyć z powyższego równania.

Do rozwiązania otrzymanego równania różniczkowego wystarczą podstawowe wiadomości dotyczące pochodnych funkcji elementarnych, można też wykorzystać do tego komputer lub kalkulator algebraiczny. Rozwiązaniem jest funkcja wykładnicza, mająca (od momentu przepełnienia wiadra, czyli dla t = 8 min) istotnie szybsze tempo wzrostu. Oto wykresy krzywych stężenia w przypadku nieograniczonego i przelewającego się wiadra.



Rys. 1

I to zadanie uczniowie mogą dalej modyfikować, wprowadzając więcej kranów o różnej przepustowości, z których wlewają się roztwory o różnych stężeniach. Można też wprowadzić kilka zbiorników o danej początkowej zawartości, w których woda przelewa się z jednego do drugiego. Komplikuje to oczywiście rachunki, ale nie rozwiązywanie otrzymywanych równań jest tu najważniejsze, a ich układanie i pokazanie, że takie równania to nie martwe, abstrakcyjne twory, lecz matematyczne opisy konkretnych sytuacji. W trakcie tego typu zajęć uczniowie rozwijają ważne umiejętności: przewidywania przebiegu doświadczenia, jego planowania, modelowania i porównania wyników teoretycznych z empirycznymi.

Niestety, w polskich podręcznikach takich zadań nie ma, nie ma też tradycji przeprowadzania tego typu zajęć na lekcji (ani matematyki, ani fizyki). Nauczyciele mają niewielkie doświadczenie w rozwiązywaniu problemów wymagających modelowania matematycznego i zbierania danych doświadczalnych pozwalających odpowiedni model skonstruować lub potwierdzić empirycznie jego zgodność z rzeczywistością. Stan ten nie zmieni się, dopóki do kanonu kształcenia przyszłych nauczycieli matematyki nie wejdzie kurs modelowania matematycznego.

Czym jest metoda projektu

Jednym ze sposobów realizacji idei kształcenia interdyscyplinarnego jest metoda projektu. Kładzie się w niej nacisk nie tyle na wiedzę i opanowanie technik, co na rozumienie procesów matematycznych, przeprowadzanie rozumowań i stosowanie metod matematyki w sposób swobodny i elastyczny do rozwiązania problemów praktycznych. Dokładniej rzecz ujmując, projekt to długoterminowe zadanie polegające na prowadzeniu przez uczniów (indywidualnie lub w zespole) samodzielnej pracy badawczej dotyczącej zjawiska związanego z życiem codziennym lub dowolną gałęzią wiedzy. Zadanie to powinno:

- nawiązywać do realnych sytuacji,
- zrywać z podziałem na treści przedmiotowe,
- odwoływać się do zainteresowań ucznia i pozwalać na poszerzenie jego wiadomości,
- wykorzystywać w nowych sytuacjach wiedzę i umiejętności zdobyte w procesie nauczania,
- mieć charakter odkrywczy, wykorzystywać naturalną ciekawość dziecka,

- wymuszać realizację pełnego procesu badawczego – od planowania przebiegu badań przez zdobywanie informacji, stosowanie rozmaitych strategii rozwiązania problemu aż po opracowanie wniosków i formułowanie dalszych pytań.

Projekt jest realizowany na podstawie wytycznych określonych w karcie projektu i zawierających:

- wprowadzenie tematu badania,
- określenie celu badawczego,
- zestaw zadań do wykonania,
- omówienie metod i narzędzi badawczych,
- propozycje organizacji pracy i prezentacji wyników,
- wykaz podstawowej literatury.

Proponowane tematy powinny dotyczyć konkretnych zjawisk życia codziennego lub leżeć na pograniczu różnych przedmiotów nauczania szkolnego. Z punktu widzenia kształcenia matematycznego realizacja takich projektów wymaga wyszukiwania danych i informacji, modelowania matematycznego, stawiania hipotez i wykazania się znajomością technik matematycznych. W wielu projektach można wykorzystać eksperymenty numeryczne i graficzne, co pozwoli uczniom docenić użyteczność technologii w odkrywaniu nowych faktów.

Przykłady tematów prac projektowych z pogranicza matematyki i wielu innych dziedzin (np. historii, przyrody, fizyki, sztuki, techniki, religioznawstwa, lingwistyki oraz życia codziennego) wraz z kartami pracy ucznia i szczegółowymi instrukcjami dla nauczyciela można znaleźć w pracy zbiorowej pt. „44 udane projekty nie tylko z matematyki" (WS PWN, 2002).

Idea projektu edukacyjnego czasem bywa spłycana i wypaczana. Nie można na przykład uznać za pracę projektową zebrania ilustracji słynnych budowli świata i wykreślenia ich osi symetrii. Choć jest to ciekawe i kształcące zadanie interdyscyplinarne, nie realizuje postulatów stawianych przed pracą projektową, która przede wszystkim ma mieć charakter badawczy i realizować wszystkie etapy wymagane w procesie odkrywania (stawianie i weryfikowanie hipotez, stosowanie rozmaitych strategii rozwiązania problemu oraz rozwijanie go przez stawianie dalszych pytań). W pracy metodą projektu ważne jest też kształtowanie pożądanych postaw intelektualnych (aktywności badawczej, twórczego, samodzielnego myślenia, wytrwałości, poszukiwania rozwiązań alternatywnych) oraz przekazywanie strategii uczenia się i rozwiązywania problemów.

Co ważne, samodzielna praca, konieczność zadawania przez ucznia pytań dotyczących matematycznej natury zjawisk i odkrywanie nowej jakościowo wiedzy mogą dać nawet słabym uczniom wiele satysfakcji i wiary we własne możliwości, a w konsekwencji – zmienić ich stosunek do przedmiotu. Wprowadzenie tej formy pracy pozwala uczniom, w sposób odmienny niż na przykład podczas typowego sprawdzianu (bo bezstresowy), wykazać się wiedzą, możliwościami i kompetencjami także matematycznymi, a nauczycielowi daje okazję obserwowania pracy uczniów w warunkach odmiennych od lekcyjnej codzienności. Ponadto, jest to znakomita okazja do ćwiczenia języka matematycznego, umiejętności opisywania obserwacji i formułowania przemyśleń. Skłania do refleksji nad otrzymanymi wynikami, poszukiwania analogii i uogólnień, rozwija cierpliwość i wytrwałość w podejmowanych działaniach oraz umiejętność działania w zespole.

Rola nauczyciela w projekcie polega głównie na doborze lektury, zaproponowaniu odpowiednich tematów, przedyskutowaniu przebiegu projektu, ustaleniu jego celów i oczekiwanych wyników. Oczywiście, uczniowie powinni mieć możliwość zwrócenia się do nauczyciela z prośbą o pomoc w razie zaistniałych trudności, jednak nauczyciel powinien zaszczepić w uczniach poczucie wartości samodzielnej pracy i odpowiedzialności za efekty własnego uczenia się.

Ważnym aspektem metody projektu jest współpraca uczniów w zespole. Daje to nauczycielowi pole do obserwacji i analizy uczniowskich zachowań, nawiązujących się kontaktów i interakcji, prób współpracy, sposobów prowadzenia dyskusji, organizowania podziału zadań i wyłaniania liderów.

Wiedza szkolna zdobywana w nauczaniu przedmiotowym bywa fragmentaryczna. Nauczyciele matematyki często boją się zagłębić w materię innych przedmiotów, tłumacząc to brakiem czasu i koniecznością przygotowania uczniów do egzaminu. Nauczyciele historii, przedmiotów przyrodniczych, języków, techniki czy sztuki jeszcze bardziej stronią od matematyki. Wydaje się, że gdyby każdy z tych nauczycieli zrobił krok w stronę pozostałych, to tam odnaleźliby może złoty środek nauczania. Metoda projektu jest doskonałym pretekstem do takiego spotkania. Z punktu widzenia kształcenia ucznia uzdolnionego matematycznie nie jest to cel priorytetowy, gdyż taki uczeń ma na ogół ukierunkowane zainteresowania. Jest to jednak pierwszy krok przygotowujący go do podejmowania samodzielnych badań i eksperymentów oraz do stawiania mądrych pytań badawczych, dostrzegania i formułowania nowych problemów, zauważania matematyki w otaczającym świecie oraz do przedłużania własnych poszukiwań poza postawione zadanie.

Efektem pracy nad projektem może być wykonywanie pomocy dydaktycznych, przedmiotów użytkowych, dokumentacji na potrzeby szkoły i środowiska, opracowanie listów interwencyjnych, artykułów do gazetek szkolnych i prasy lokalnej, organizacja wystaw, konkursów, przygotowanie i przeprowadzenie zajęć lekcyjnych z różnych przedmiotów, wywiadówek dla rodziców itp. Prezentacja wyników prac powinna być świętem klasy. Wszyscy (także rodzice) powinni mieć możliwość docenienia i podziwiania wyników pracy uczniów.

Jak oceniać pracę badawczą uczniów?

Aby metoda projektu odniosła pożądany skutek, po jej zakończeniu musi nastąpić szczegółowa i rzetelna ocena. Jest to bardzo ważny, ale i wyjątkowo trudny element pracy nad projektem. Trudności sprawia zarówno ocena samodzielnej aktywności badawczej uczniów, jak i ich indywidualnego wkładu do pracy zespołowej. Dlatego praca metodą projektów wymaga wprowadzenia nowego stylu oceniania, ponieważ najważniejszy składnik podlegający ocenie (twórczość ucznia) trudno poddaje się mierzeniu i obiektywizacji. Ważnym elementem wychowawczym jest też samoocena ucznia i wzajemna ocena przez pozostałych uczniów pracujących w grupie. Oczywiście szczegółowe kryteria oceniania powinny być uzgodnione z uczniami przed rozpoczęciem realizacji projektu.

W projekcie (a także w innych zadaniach realizowanych zespołowo) każdy uczeń powinien być oceniany indywidualnie. W przeciwnym razie ciężar realizacji projektu będzie spoczywał na najlepszych uczniach w grupie, a słabsi będą się czuli zwolnieni z odpowiedzialności za jego wyniki. Praca w grupie daje okazję, aby uczyć sprawiedliwie i obiektywnie oceniać siebie i innych. Uczy też właściwego podziału zadań. Przy racjonalnym podziale pracy każdy uczeń może dostać do wykonania taką jej część, która pozwoli mu otrzymać maksymalną ocenę za jego wkład do projektu.

Wydaje się, że sprawiedliwym i wychowawczym sposobem ilościowej oceny pracy członków grupy jest przyjęcie następującej zasady (oceny wystawiane np. w skali 1–6):

- 50% oceny końcowej stanowi ocena wystawiona przez nauczyciela,
- 25% oceny końcowej stanowi średnia ocen wystawionych przez członków grupy (w sposób tajny lub jawny),
- 25% oceny końcowej stanowi ocena wystawiona samemu sobie przez danego ucznia.

Największe znaczenie w projekcie ma szczegółowa ocena opisowa projektu, z dokładnym omówieniem wszystkich jego walorów i uchybień. Jednak aby uczniowie mogli porównać efekty swojej pracy z innymi grupami lub odnotować własne postępy w stosunku do innych prowadzonych przez siebie prac, przydatne jest wprowadzenie oceny ilościowej. Wymaga to wypracowania nowego stylu oceniania, jako że:

- w nauczaniu matematyki dominuje tendencja, żeby kryteria ocen były precyzyjnie opisane i zobiektyzowane, natomiast oceniając prace projektowe, nauczyciel musi zaakceptować mniej precyzyjny i bardziej subiektywny styl oceniania;
- zasady oceniania powinny zostać omówione z uczniami przed przystąpieniem do realizacji zadania, jednak zbyt szczegółowe opisanie zawartości pracy i wymagań zniweczy główny cel projektu, jakim jest samodzielna praca badawcza ucznia, zatem z konieczności kryteria oceny muszą być dość ogólne;
- oceniać należy nie to, co łatwo zmierzyć, ale to, co jest naprawdę ważne w pracy nad projektem, nawet jeśli są to umiejętności i wyniki trudne do „zmierzenia" (np. umiejętność współpracy w grupie).

Główne czynniki, które należy uwzględnić w ocenie projektu, to: zrozumienie problemu badawczego, użycie wielorakich źródeł informacji, zastosowanie adekwatnych narzędzi matematycznych, stopień wyczerpania i rozwinięcia tematu, sposób i forma prezentacji wyników, organizacja współpracy w grupie. Dlatego przy ocenianiu pracy badawczej sprawdzamy, czy są w niej dowody świadczące o: zrozumieniu tematu, jasnym określeniu celu pracy, sformułowaniu właściwych pytań, zaplanowaniu pracy, przyjęciu właściwej metodologii eksperymentowania, krytycznej analizie zgromadzonych informacji, poprawności wyciągniętych wniosków, stosowaniu własnych strategii postępowania, podjętych próbach „przedłużenia" tematu, wykazywaniu własnej inicjatywy.

Przy ocenie realizacji projektu sprawdzamy, czy uczeń: zdobył potrzebne informacje, przetworzył je i nadał im nową, czytelną formę, użył właściwej wiedzy matematycznej i otrzymał poprawne wyniki. Z kolei przy ocenie prezentacji wyników uwzględniamy: wybór właściwej metody prezentacji (raport, plakat, wystawa modeli, referat, pokaz), jasne przekazanie wyników pracy (właściwe rozłożenie akcentów), poprawność i precyzję języka, przejrzystość i estetykę pracy, dbałość o zainteresowanie innych uczniów. I wreszcie przy ocenie organizacji pracy w grupie uwzględniamy: zaangażowanie wszystkich członków grupy, racjonalny podział pracy, sposób podejmowania decyzji i rozwiązywania konfliktów, dbałość o spójność ostatecznego efektu pracy, samoocenę uczniów oraz ich ocenę przez resztę grupy.

Na zakończenie zamieszczamy przykładową instrukcję do interdyscyplinarnego projektu na poziomie gimnazjalnym. Więcej pomysłów można znaleźć w wspomnianej już książce pt. „44 udane projekty nie tylko z matematyki" oraz na Wrocławskim Portalu Matematycznym (www.matematyka.wroc.pl, zakładka: Kącik naukowy > Projekty).

Odmierzyć przemijanie

Czas odgrywa istotną rolę w życiu każdego człowieka. Spróbuj sobie wyobrazić, co by się stało, gdyby wszystkie zegary świata się zatrzymały... Celem tego projektu jest przegląd różnych sposobów, jakimi od wieków ludzie próbowali uchwycić i odmierzyć przemijanie.

ROZWAŻANIA

Po co mierzymy czas?

- Dla kogo i w jakich sytuacjach pomiar czasu jest bardzo ważny?
- W jakich sytuacjach z Twojego życia ważną rolę odgrywa pomiar czasu?
- Zbierz różne przysłowia i powiedzenia dotyczące upływu czasu. Wykorzystaj polskie przysłowia ludowe, sentencje łacińskie, przysłowia innych narodów. Jakie myśli się za nimi kryją?

Jak mierzymy czas?

- Jak ludzie pierwotni zauważali upływ czasu?
- Pomyśl o różnych sposobach mierzenia czasu stosowanych w codziennym życiu.
- Jak poradzisz sobie w różnych sytuacjach, gdy nie masz zegarka?

Czym mierzymy czas?

- Jakie zjawiska powtarzają się tak regularnie, że możemy nimi odmierzać czas? Pomyśl o mierzeniu długich i krótkich przedziałów czasu.
- Jakie zjawiska upływają regularnie, stale jednakowo, w tym samym tempie, bez żadnych zaburzeń? Czy możemy wykorzystać je do pomiaru czasu?
- Pomyśl, jak do mierzenia czasu można wykorzystać każdy z czterech żywiołów.
- Jak wykonać zegar, aby o upływie czasu informował nas za każdym razem inny zmysł?
- Czy można skonstruować idealny zegar?
- Jakie znasz jednostki czasu stosowane dawniej i dziś?
- Czy czas można mierzyć w litrach, kilometrach i innych nietypowych jednostkach?

Nietypowe sposoby mierzenia czasu

- Czy twoi koledzy z klasy mają dobre wyczucie czasu? Zaprojektuj i przeprowadź odpowiednie eksperymenty. Opracuj wnioski.
- Powtórz w równym tempie 10 razy *sto dwadzieścia jeden*. Ile czasu to trwa? Przeprowadź podobne eksperymenty. Wymyśl „gadający zegar".
- Wyobraź sobie, że jedziesz pociągiem i zapomniałeś zegarka. Jak możesz mierzyć czas jazdy? Jak mierzyć odległość, jaką w tym czasie przejechałeś? Jak określić prędkość jazdy pociągu? Wykonaj wszystkie potrzebne w tym celu pomiary i obliczenia. Czy wiesz, skąd się bierze stukot kół pociągu? Jak można mu zapobiegać?
- Czy mógłbyś mierzyć czas swoim chodem? Wykonaj potrzebne pomiary i eksperymenty.
- Opracuj własny pomysł na mierzenie czasu.

Przepraszam, która godzina?

- Czy wszędzie na świecie czas mierzy się tak samo? Czy wszędzie jest ta sama godzina?
- Czy w różnych miejscach w tym samym kraju może być różny czas?
- Skąd wiadomo, która godzina jest w jakim miejscu na świecie? Ustaw zegary wskazujące czas w różnych miastach świata.
- W jakich sytuacjach zmiana stref czasu może okazać się kłopotliwa?
- Czy przez cały rok godzina dwunasta wypada w południe, tzn. gdy słońce jest w zenicie? Od czego to zależy?
- Po co zmieniamy czas?
- Jak za pomocą słońca określić kierunki świata? Czy podobnie jest na obu półkulach?
- Czy kierunki świata można określić za pomocą zegarka?

Słynne zegary świata

- Czy słyszałeś o Big-Benie? Gdzie się znajduje? Skąd wzięła się jego nazwa?
- Jakie znasz inne słynne zegary, w tym „zegary z nazwiskiem"?
- Co to są *włoskie godziny*? Czym się różnią tak skonstruowane zegary od współczesnych? Gdzie można je dziś jeszcze zobaczyć?
- Gdzie się znajdują znane muzea zegarów w Polsce i na świecie? Spróbuj odwiedzić jedno z takich muzeów.

- Czy wiesz, co to są *ogrody czasu*? Gdzie znajduje się taki ogród najbliżej Twojego miejsca zamieszkania?
- „Ten zegar stary niczym świat kuranty ciął jak z nut" – skąd pochodzą te słowa?
- Jakie znasz inne dzieła sztuki (literackie, muzyczne, plastyczne), w których ważnym motywem jest zegar lub mierzenie czasu?

Zbiór zadań o czasie

- Zadania dotyczące zegarów i mierzeniu czasu pojawiają się często w podręcznikach i na konkursach matematycznych, zbierz ich jak najwięcej, a może sam ułożysz podobne zadania.
- Opracuj zebrany materiał, podziel na działy, dobierz kryteria klasyfikacji zadań.
- Przygotuj edycję swojego zbioru zadań w wersji papierowej lub elektronicznej.
- Na podstawie zebranych materiałów wspólnie z nauczycielem możecie też przygotować szkolny turniej zadaniowy.

ODROBINA HISTORII	EKSPERYMENTY
• Najprostszym zegarem stosowanym już 5 tysięcy lat temu w Babilonii, Egipcie, Chinach i Indiach był zwykły kij lub wysoki kamienny słup wbity w ziemię. Nazywa się go **gnomonem**. Często stał w centralnym punkcie miasta. Był to pierwszy model **zegara słonecznego**. • Jak działają takie zegary? Czy widziałeś gdzieś taki zegar? Jakie są jego zalety, a jakie wady? • Gdzie w Polsce znajdują się słynne zegary słoneczne?	• Zapoznaj się dokładnie z budową zegarów słonecznych. Co pełni w nich funkcję wskazówki? Jak zmienia się jej długość? Dlaczego? • Zbuduj urządzenie, które pozwoli ci mierzyć czas słoneczny w miejscu Twojego zamieszkania. Czy taki zegar dobrze chodzi przez cały rok? Czy dobrze chodzi w każdym miejscu? • Zbuduj kieszonkową (przenośną) wersję zegara słonecznego.
• W starożytnych Chinach stosowano nasycone oliwą sznurki z supłami. Gdy płomień osiągnął kolejny węzeł, upływał określony czas. W innych krajach stosowano zegary oliwne, kadzidłowe, świecowe, piaskowe i wodne. Jak wyglądały? Jak działały? • Czy wiesz, co to jest klepsydra?	• Wykonaj model zegara świecowego i klepsydry wodnej. Wyskaluj je w odpowiednich jednostkach. Czy w obu przypadkach skale są jednakowe? Sprawdź dokładność chodzenia tych zegarów. Opisz wnioski.
• W XIII wieku wprowadzono pierwsze zegary mechaniczne z napędem sprężynowym. Początkowo były bardzo duże. Przez wiele stuleci jedyny zegar w mieście umieszczany był na wieży zamku lub ratusza.	• Dowiedz się, jak działa zegar sprężynowy. Możesz poprosić o pomoc zegarmistrza. • Znajdź zegary wieżowe w okolicy miejsca Twojego zamieszkania. Z jakiego okresu pochodzą? Jak są napędzane?
• Od XVII wieku astronomowie do odmierzania równych odstępów czasu zaczęli wykorzystywać ruch wahadła. Wahadeł używał Galileusz i astronom z Gdańska Jan Heweliusz. Za twórcę zegara wahadłowego uznaje się Christiana Huygensa [czyt. chajchensa]. Dowiedz się czegoś o ich życiu.	• Wykonaj różne modele wahadeł. Od czego może zależeć czas, jaki odmierzają ich wychylenia? • Przeprowadź eksperyment i sprawdź swoje przypuszczenia. Opisz wnioski. Możesz o tym porozmawiać z nauczycielem fizyki. • Dowiedz się, co napędza wahadło w zegarach.
• Kiedy się pojawiły zegarki przenośne? • Zbierz wiadomości o różnych typach współcześnie stosowanych zegarów. Co odmierza w nich równe przedziały czasu? Jak są napędzane?	

Dokładność chodzenia zegara

- Co to znaczy, że zegar późni się lub spieszy? Jak mierzyć i porównywać opóźnienie zegarów?
- Zbierz lub wymyśl i opracuj zbiór zagadek logicznych dotyczących źle chodzących zegarów.
- Uporządkuj chronologicznie różne typy zegarów, jakie poznałeś. Dowiedz się, jakie były ich dokładności.
- Przedstaw w postaci diagramu lub wykresu, jak się zmieniała dokładność chodzenia zegara na przestrzeni stuleci.

PREZENTACJA PROJEKTU

Przygotowanie strony internetowej projektu oraz szkolnej wystawy poświęconej historii mierzenia czasu. Prezentacja wykonanych modeli, zdjęć, rysunków, zebranych egzemplarzy zegarów i wiadomości o nich. Przeprowadzenie szkolnego konkursu zadaniowego.

UWAGI I CIEKAWOSTKI DLA NAUCZYCIELA

- Ze względu na obszerność tematu projekt powinien być realizowany w zespole uczniowskim we współpracy z nauczycielem fizyki, historii, techniki, sztuki i języka polskiego.
- W trakcie realizacji projektu uczeń powinien uświadomić sobie, że dobry zegar powinien równo odmierzać równe odcinki czasu. W tym celu można wykorzystać jakieś zjawisko cyklicznie powtarzające się lub upływające jednostajnie. Skonstruowanie dokładnego zegara wcale nie jest łatwe. Powstaje paradoksalne pytanie: czy zegar odmierza jako równe takie okresy czasu, które naprawdę są równe, czy też o równych okresach czasu możemy mówić z sensem dopiero po wyborze jakiegoś zegara, definiując jako równe te okresy, które on jako równe odmierza.
- Zegary przenośne były niezbędne dla podróżników i żeglarzy. Tylko dzięki nim mogli określać swoje położenie, a dokładniej – długość geograficzną. Można o tym przeczytać w bestselerowej książce Davy Sobel „W poszukiwaniu długości geograficznej" (Zysk i S-ka, 1998).
- Uczniowie mogą zbudować najprostszy model zegara słonecznego, w którym wskazówką jest cień pionowego pręta wbitego w ziemię. Jego skala będzie nierównomierna. Mogą też wykonać zegar poziomy na boisku lub pionowy na ścianie budynku z pochyloną wskazówką w zależności od szerokości geograficznej miejsca zamieszkania. Pełne godziny wypadają wtedy na tarczy co 15°.
- Pierwszy zegarek kieszonkowy wykonano w 1504 roku. Nosili je tylko mężczyźni. Zegarek na rękę pojawił się w 1790 roku, ale moda na nie rozpowszechniła się dopiero pod koniec XIX wieku. Początkowo nosiły je tylko kobiety, mężczyźni do końca drugiej wojny światowej pozostali przy zegarkach z dewizką.
- Uczniowie starszych klas gimnazjum mogą się zapoznać z problemem poszukiwania tautochrony – krzywej, która umożliwiła zastosowanie zegarów wahadłowych na statkach. Pisze o tym Marek Kordos w „Wykładach z historii matematyki"(WSiP, 1994).
- Zegary kwarcowe wprowadzone na początku XX wieku wykorzystują okresowe deformacje płytki kwarcowej pod wpływem przyłożonego zmiennego napięcia elektrycznego. Dokładność ich chodu wynosi 0,001 s dziennie. Zegary atomowe wprowadzone pod koniec XX wieku wykorzystują drgania własne cząstek lub atomów. Dokładność ich chodu to 1 s na 1000 lat, tj. $2{,}7 \cdot 10^{-6}$ s dziennie (dla zegarów cezowych – nawet 10^{-13} s dziennie).

Zamiast zakończenia

Umiejętności, jakie rozwija metoda projektu:
- planowanie pracy, wybór optymalnej metody rozwiązania problemu,
- podział pracy, współpraca w grupie, dyskusja, współodpowiedzialność za efekty pracy,
- gromadzenie informacji z różnych źródeł (eksperyment, wywiad, literatura, internet),
- przetwarzanie danych (także z wykorzystaniem technologii informacyjnej),
- prawidłowa metodologia eksperymentowania,
- wykorzystanie metod matematycznych do celów i zadań praktycznych,
- tworzenie modelu matematycznego,
- definiowanie, przeprowadzanie klasyfikacji i tworzenie jej kryteriów,
- stawianie i testowanie hipotez, poszukiwanie regularności i związków,
- wyciąganie wniosków z danych i obserwacji,
- stawianie pytań badawczych,
- prezentacja wyników w różnych formach.

Korzyści płynące z metody projektu dla nauczania matematyki:
- Uczniowie często postrzegają matematykę jako zestaw reguł i rutynowych algorytmów. Jej używanie sprowadzają do wykonania standardowych tricków w celu otrzymania odpowiedzi, która nie przedstawia sama w sobie żadnej wartości. Często nawet dobrzy uczniowie nie potrafią zastosować wiedzy matematycznej w niestandardowych (innych niż zadania szkolne) sytuacjach.
- Metoda projektu stawia nie tyle na wiedzę i opanowanie technik, co na rozumienie procesów matematycznych, przeprowadzanie rozumowań, stawianie i empiryczne badanie hipotez, definiowanie obiektów i klasyfikowanie ich na tej podstawie, stosowanie matematyki jako narzędzia do rozwiązania problemów praktycznych, kształtowanie rozmaitych strategii rozwiązania. W ten sposób rozwijamy ważne umiejętności matematyczne oraz ich „swobodne" i elastyczne stosowanie.
- W metodzie projektu uczeń ma możliwość samodzielnego stawiania pytań. Tradycyjnie pochodziły one ze źródła „zewnętrznego" (nauczyciel, podręcznik, pytania egzaminacyjne). Były to pytania o wiedzę już posiadaną, a więc odtwórcze. W projektach stawiamy pytania, na które wiemy, że uczeń nie zna odpowiedzi i dopiero w trakcie ich realizacji powinien ją odkryć. Są to pytania poszukiwawcze. Stawiając takie pytania i ucząc je zadawać, sprawiamy, że proces nauczania staje się autentycznym aktem badawczym.

CZĘŚĆ II

Jak uczyć geometrii (czyżby matematyka prawie dla nikogo?)

1. O tym, czego nie widać – Marek Kordos
2. Piękno geometrycznych rozumowań – Stefan Mizia
3. Dowody geometryczne w praktyce – Małgorzata Mikołajczyk
4. Dynamiczne nauczanie geometrii – Piotr Zarzycki

1. O tym, czego nie widać

Marek Kordos, Warszawa

Sztuka mądrego uczenia matematyki to umiejętność stawiania przed uczniami takich zadań, w których nie widać oczywistej drogi rozwiązania. Początkowo popadają oni w konsternację, ale i zaciekawienie. Dopiero dalsze wskazówki nauczyciela naprowadzają ich na to, czego od razu sami nie zauważyli i czego z pozoru w zadaniu w ogóle nie ma. Poszukiwanie i odnajdywanie takich „nieistniejących obiektów" jest jednym ze sposobów łatwego rozwiązywania trudnych matematycznych problemów. Stosowne przykłady podano poniżej. Nie bez przyczyny niemal wszystkie dotyczą przestrzennej geometrii. Ten rodzaj wyobraźni jest dostępny niewielu, dlatego nawet najlepsi uczniowie nie radzą sobie z zadaniami 3D bez pomocy nauczyciela.

Do czego na lekcjach matematyki potrzebny jest nauczyciel?

Każdy zapewne pamięta, jak – będąc w szkole – pomagaliśmy mniej zainteresowanym matematyką kolegom w pokonywaniu trudności z jej opanowaniem. Zapewne często wydawało się nam, że to właśnie my uczymy matematyki, a nauczyciel odgrywa rolę „aparatu nacisku" – wskazuje, co ma być opanowane, kontroluje i karze (względnie nagradza). Ponadto za takim poglądem przemawiał fakt, że również korzystający z naszej pomocy koledzy byli zdania, iż dopiero od nas nauczyli się matematyki i zrozumieli, o co w niej chodzi.

Tak radykalny pogląd sugerowałby rewolucyjne zmiany w nauczaniu i może nawet wyeliminowanie nauczycieli, którzy mogliby zostać – bez żadnej szkody dla systemu edukacji – zastąpieni na przykład przez jakieś urządzenie elektroniczne. Jednak tak się nie dzieje, wypada więc zadać pytanie – dlaczego? Co dodatkowego (poza funkcjami organizacyjno-kontrolnymi) wnosi nauczyciel w stosunku do kolegi, który pomaga w nauce?

Jakimś tropem w poszukiwaniu odpowiedzi może być spostrzeżenie, że nauczyciel dysponuje – w odróżnieniu od kolegi – wykształceniem matematycznym, wykraczającym poza program szkolny. Czy ma (względnie może mieć) z tego jakiś pożytek?

Dodatkowy wielbłąd

Typowe zadanie, które występuje praktycznie we wszystkich zbiorkach anegdotycznych zadań, mających przybliżać młodym ludziom matematykę, mówi o podziale spadku (mogą to być np. wielbłądy).

Umierający właściciel stada wielbłądów polecił, aby po jego śmierci połowę z nich oddać najstarszemu z synów, czwartą część średniemu, a część szóstą – najmłodszemu. W stadzie było 11 zwierząt.

Synowie, rzecz jasna, nie umieją tego zrobić (jako że jedenastu wielbłądów bez użycia drastycznych środków nie da się podzielić ani na 2, ani na 4, ani na 6). Ale wędrowny derwisz (czy Hodża Nasred-din) pożycza jednego wielbłąda od sąsiadów (dziś pewnie zamiast pożyczać, wyciągnąłby wirtualnego wielbłąda z internetu) i dzieli dwanaście wielbłądów we wskazany sposób. Najstarszy syn otrzymuje 6 wielbłądów, średni – 3, a najmłodszy – 2, co – mimo że każdy dostał więcej, niż wskazuje standardowa arytmetyka – pozwala oddać dodatkowego wielbłąda sąsiadom (lub wypuścić wolno do sieci).

Otóż wydaje się, że rolą nauczyciela w klasie jest wskazanie owego dodatkowego wielbłąda, o którego istnieniu dowiedział się podczas studiów (albo też tam nauczył się go szukać). Innymi słowy, nauczyciel – wiedząc o miejscu, jakie w matematyce zajmuje przedstawiany uczniom problem – powinien im wskazywać w owym problemie te jego aspekty, których niewprawnym okiem dostrzec się nie da. I na tym polega jego przewaga nad kolegą pomagającym w nauce, kolega bowiem jedynie doskonali w używaniu tego, co jawnie jest pod ręką, wyrabia sprawność, a nie poszerza horyzontu.

Nie ma sensu – zważywszy przeznaczenie tego tekstu – abym objaśniał, skąd się wziął dodatkowy wielbłąd, czyli jak można było go „zobaczyć" w treści zadania. Spróbuję natomiast pokazać takie dostrzeganie niewidzialnego (wręcz nieistniejącego) na nieco bardziej złożonych przykładach.

Trzy walce

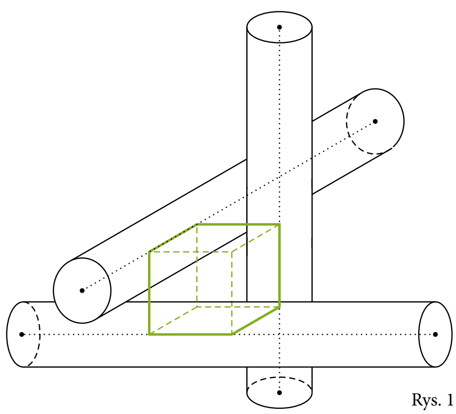
Zadanie, w którym „dodatkowy wielbłąd" był – moim zdaniem – najpiękniej ukryty, znalazłem w zbiorku Igora Fiodorowicza Szarygina „Zadaczi po stereometrii" (Nauka, 1989).

Jak szeroki walec można włożyć pomiędzy trzy jednakowe, parami prostopadłe walce?

Uczeń Czepialski może od razu zakrzyknąć, że można wetknąć dowolnie gruby walec – wystarczy, by te trzy walce były dostatecznie rozsunięte. Oczywiście, może też nie zakrzyknąć, ale wtedy warto samemu zasugerować takie pytanie po to, by uświadomić uczniom, że w zadaniach matematycznych odpowiedź musi być dobra zawsze, „co by się nie działo". A stąd droga do pytania, kiedy dodatkowemu walcowi będzie najciaśniej.

Sytuację można dogodnie zilustrować za pomocą trzech ołówków, z których każdy opiera się o dwa pozostałe. Ogląd powstałego otworka pozwala na urządzenie totalizatora: kto poda wynik najbliższy prawdy? Co jednak zrobić, aby sytuacja poddała się matematycznej obróbce?

Walec jest dobrze określony przez prostą – swoją oś – i liczbę – swój promień – tutaj dla wszystkich jednakowy (oznaczmy go R). Można zapytać, jaka jest odległość osi – tu wszyscy zakrzykną, że $2R$, ale wtedy warto zapytać, w którym miejscu osie są najbliżej. A przecież są skośne, więc istnieje dokładnie jeden łączący je odcinek o najmniejszej długości. To już nieuchronnie prowadzi do wykonania rysunku.



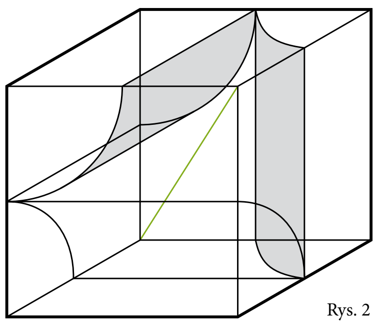
Rys. 1

Od nauczyciela może wyjść pomysł, by się zastanowić, jak odległe są na osi punkty, w których dotykają je najkrótsze odcinki łączące ją z sąsiednimi osiami. I tak odkrywamy, że powstała przestrzenna łamana złożona z sześciu kolejno prostopadłych odcinków o długości $2R$ każdy. Co to może być za łamana?

Nareszcie mamy coś typowego – to jest sześcian! Powstaje pytanie, co można z nim zrobić. W tym miejscu warto sobie przypomnieć, że szukamy czwartego walca. Jeśli Uczeń Sprytny nie wpadnie na pomysł, by szukać jego osi, nauczyciel może sam spytać, jak ona się ma do narysowanego sześcianu.

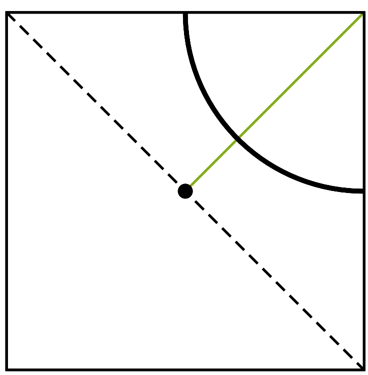
I tu jest kolejne newralgiczne miejsce. Trzeba doprowadzić do odkrycia faktu, że jeśli warunki dane w zadaniu mają jakąś symetrię, to tę samą symetrię mają jego rozwiązania. I tak odkrywamy, że oś szukanego walca to prosta łącząca „nieistniejące", czyli nienależące do powstałej łamanej wierzchołki sześcianu. A nawet więcej: to wewnątrz sześcianu rozgrywa się cała sprawa – tam jest najciaśniej.

Zobaczmy zatem, jakie są ograniczenia szerokości poszukiwanego walca – to droga do kolejnego rysunku (rys. 2). On zaś pozwala na jeszcze jedno zastosowanie przytoczonej przed chwilą zasady symetrii: widać, że przy obrocie o 120° narysowane „ćwiartki" walców zamieniają się miejscami, więc każda ogranicza szerokość walca w ten sam sposób. A zatem wystarczy zająć się tylko jedną ćwiartką!



Rys. 2

Nietrudno wpaść na pomysł, że należy narysować przekrój sześcianu (z jedną tylko „ćwiartką" danego walca) płaszczyzną prostopadłą do tej „ćwiartki" i przechodzącą przez środek przekątnej zawartej w osi walca poszukiwanego (rys. 3).



Rys. 3

Teraz jesteśmy już w „prawdziwej" (czyli szkolnej) matematyce i umiemy błyskawicznie obliczyć, że odległość osi od ograniczającej ją „ćwiartki", czyli promień poszukiwanego walca, to $(\sqrt{2}-1)R$. Tak więc walec, który (zawsze!) daje się wetknąć między trzy parami prostopadłe, jednakowe walce, musi być od nich 0,4 razy cieńszy.

Godne zauważenia i przekazania uczniom jest spostrzeżenie, że matematyka nie mieści się w standardowych przepisach – algorytmach, w których jesteśmy trenowani (tresowani?), lecz przeciwnie – polega na tym, by interesujące nas pytania doprowadzić do stanu, gdy pozostaje nam już tylko zastosowanie tych standardów. W zadaniu o walcach standardowe było tylko obliczenie połowy różnicy między przekątną kwadratu a jego bokiem. Reszta była matematyką.

Trzy kulki w sześcianie

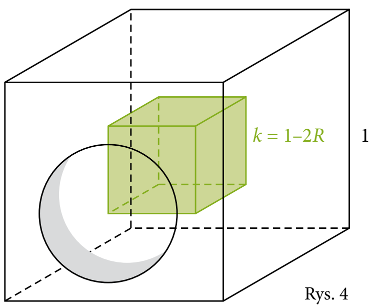
Jak było widać w poprzednim przykładzie, podstawową czynnością intelektualną, jaką najczęściej musimy wykonywać, rozwiązując zadania, które nie sprowadzają się do tłuczenia standardowych algorytmów, jest wyobrażenie sobie jakichś znanych nam obiektów, które pozwolą przybliżyć proces rozwiązywania do naszych możliwości. Podobne możliwości daje kolejne zadanie.

Jaki promień mogą mieć trzy jednakowe kulki mieszczące się w sześcianie o krawędzi 1?

Tutaj kluczowy pomysł to zastanowienie się, jakie pozycje może zajmować w sześcianie jedna kulka (dostatecznie mała, by się w nim zmieściła). Takie pytanie może się wydać niesensowne i niezrozumiałe, bo co niby ma oznaczać zawarty w nim zwrot *jakie pozycje*? Kulka przecież w każdej pozycji wygląda tak samo. Jeśli mimo wszystko spróbujemy na to pytanie odpowiedzieć, najsensowniejsze (zapewne także dla naszych uczniów) wyda się zbadanie, gdzie mianowicie może się znajdować środek tej kulki.

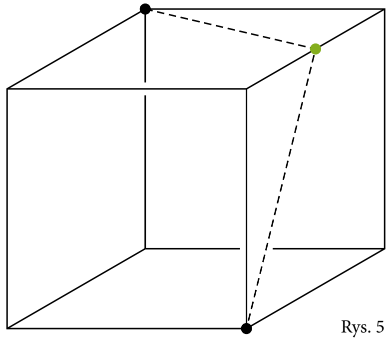
Warto w tym miejscu zauważyć, że pytania nieprecyzyjne często dają więcej korzyści od pytań jednoznacznie kierujących ucznia do określonej odpowiedzi. Mogą bowiem uruchamiać przeszukiwanie pamięci i intuicji, co jest niezbędne do wszelkich twórczych działań.

Gdy już ustalimy, że interesują nas wszelkie możliwe położenia środka kulki (oznaczmy jej promień przez R), to szybko uda się stwierdzić, że leży on w sześcianiku o krawędzi $1-2R$ (dalej będziemy tę liczbę oznaczać literą k), co widać na rysunku 4. Zatem zamiast zajmować się kulkami, możemy się zastanowić nad punktami, a zamiast zajmować się sześcianem jednostkowym, możemy się zająć mniejszym sześcianikiem.



Rys. 4

Teraz chcemy umieścić trzy punkty w sześcianiku, tak aby najmniejsza odległość między nimi była jak największa. Zadanie takie łatwo byłoby rozwiązać, gdyby chodziło nie o trzy, lecz o dwa punkty – wtedy byłyby to dwa przeciwległe wierzchołki i ich odległość byłaby równa $k\sqrt{3}$. Ale trzeci punkt byłby wtedy odległy od (co najmniej) jednego z nich nie więcej niż o $(k\sqrt{5})/2$. Widać to na rysunku 5, na którym zielony punkt jest w takiej właśnie odległości od każdego z czarnych punktów. Jeśli go jakkolwiek poruszymy, odległość od (co najmniej) jednego z tych punktów wzrośnie.

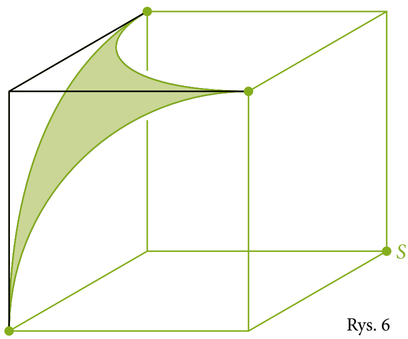


Rys. 5

I tu jest miejsce na sformułowanie przez nauczyciela tylko pozornie oczywistego spostrzeżenia: w celu zbadania, czy jakaś sytuacja jest ekstremalna, najlepszym sposobem jest obejrzenie tego, co się dzieje przy niewielkiej jej zmianie.

Tymczasem można zauważyć lepsze rozwiązanie, w którym te trzy punkty są w wierzchołkach sześcianika leżących na dwóch stykających się przekątnych jego sąsiednich ścian. Ich odległości są wtedy jednakowe i równe $k\sqrt{2}$, a więc istotnie większe od $(k\sqrt{5})/2$ (prawda?). Wydaje się, że jest to najlepsza sytuacja. Ale jak to sprawdzić?

Jak wykazać, że jeśli choć jedna z odległości między trzema punktami w sześcianiku jest większa od $k\sqrt{2}$, to jedna z pozostałych musi być od $k\sqrt{2}$ mniejsza? Niezłym sposobem jest odrzucenie tych wszystkich punktów, które na pewno nie dają lepszej odpowiedzi od tej, którą właśnie testujemy. W tym przypadku „dodatkowym wielbłądem" jest kula, ale większa, mająca środek S w jednym z wierzchołków sześcianika i promień $k\sqrt{2}$ (rys. 6).

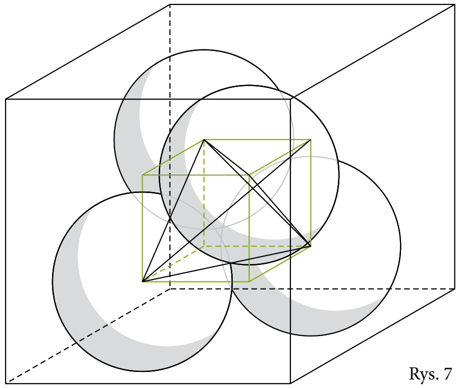


Rys. 6

Jeśli istnieje w sześcianiku trójkąt, którego wszystkie boki są dłuższe niż $k\sqrt{2}$, i jednym z jego wierzchołków jest środek kuli, to pozostałe dwa muszą się znajdować w tym kawałku sześcianika, który z kuli wystaje. A tam – jak łatwo zauważyć – nie ma punktów oddalonych bardziej niż o $k\sqrt{2}$.

Rozwiązanie jest zatem takie, że środki trzech kulek w sześcianie jednostkowym są najbardziej oddalone, gdy tworzą trójkąt o boku $k\sqrt{2} = \sqrt{2}(1-2R)$. I co dalej? Jakiego warunku jeszcze nie wykorzystaliśmy? Oczywiście tego, że kulki te muszą się mieścić jedna obok drugiej, a więc że odległość ich środków wynosi co najmniej $2R$. W ten sposób dotarliśmy do miejsca na standardowe rachunki – porównujemy liczby wyrażające odległość środków: $\sqrt{2}(1-2R) = 2R$, a stąd otrzymujemy $R = 1-\sqrt{2}/2$, czyli wynik bliski 0,3. Aby te rachunki wykonać, nie potrzeba było już specjalnej finezji.

Gdy poprosimy o narysowanie sześcianu z wrzuconymi do niego kulami, Uczeń Dokuczliwy, wpatrując się w rysunek 6, zażąda informacji, które mianowicie dwa spośród trzech wierzchołków leżących na powierzchni narysowanej tam kuli należy wybrać. W przeciwnym razie sami powinniśmy takie pytanie zadać. Odpowiedź, że wszystko jedno które, wskaże, że „niechcący" udowodniliśmy twierdzenie: *Jeśli trzy jednakowe kule mieszczą się w sześcianie, to zmieści się tam jeszcze i czwarta kula tej samej wielkości.*



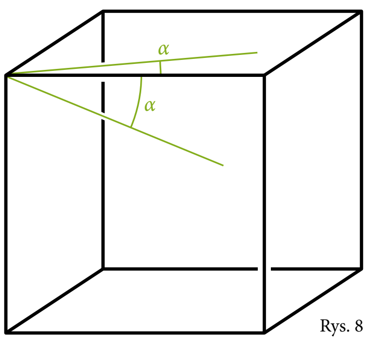
Rys. 7

Zadanie o kulach w sześcianie ma jeszcze i tę zaletę, że niesłychanie łatwo je przeformułować, zmieniając liczbę 3 na jakąś inną. Na przykład dla liczby 2 rozwiązanie właściwie już uzyskaliśmy – daje je porównanie liczb $\sqrt{3}(1-2R)$ oraz $2R$, skąd otrzymujemy $R = (3-\sqrt{3})/4$, a dla liczby 8 rozwiązanie daje porównanie liczb $1-2R$ oraz $2R$, skąd mamy $R = ¼$. A co dla innych liczb?

Ile obcięliśmy?

Kolejne zadanie zostało ułożone przez Stefana Kulczyckiego na egzamin wstępny na Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Warszawskiego, który zdawałem w 1958 roku. W różnych zbiorach zadań z egzaminów wstępnych można znaleźć inne zadanie, o bardzo podobnej treści, ale znacznie od przytoczonego niżej łatwiejsze. Oto oryginalne zadanie.

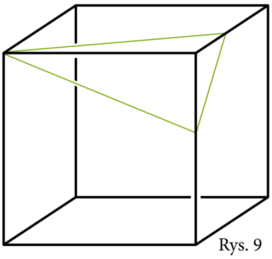
Sześcian jednostkowy przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek i przecinającą dwie ze ścian, do których ten wierzchołek należy, wzdłuż odcinków tworzących ten sam kąt α *z ich wspólną krawędzią* (rys. 8). *Obliczyć objętość odciętej bryły.*

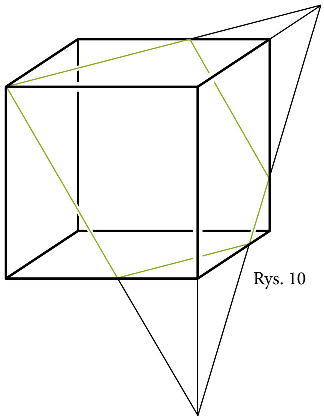


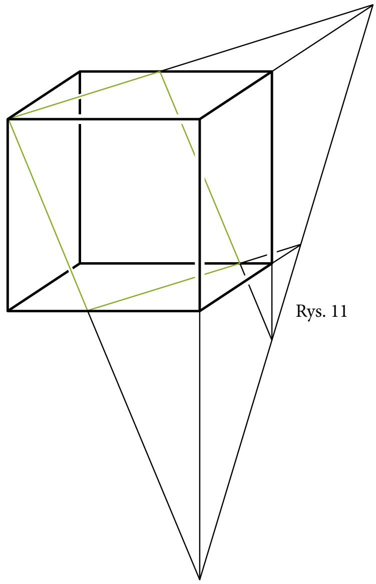
Rys. 8

Jak łatwo zauważyć, gdy kąt ten jest mały (mniejszy od 45°), odcięta bryła jest czworościanem (rys. 9), którego trzy parami prostopadłe krawędzie mają odpowiednio długości 1, tgα, tgα. Zatem objętość odciętej bryły jest w tym przypadku równa $V = 1/6 \cdot \mathrm{tg}^2\alpha$ (dalej będziemy oznaczać tę wielkość przez w).

Gdy kąt przekracza 45°, sprawa się komplikuje. Odcięta bryła ma sześć ścian: dwie trójkątne, dwie czworokątne i dwie pięciokątne (rys. 10). Przy jej rysowaniu warto pamiętać, że odcinki powstające na ścianach równoległych są zawsze równoległe. Przy dalszym powiększaniu kąta sytuacja jeszcze raz ulega zmianie, gdy kąt przekracza arctg2, czyli gdy przecięcie mija środki krawędzi równoległych do krawędzi wspólnej. Wówczas wszystkie sześć ścian odciętej bryły to czworokąty (rys. 11).


Rys. 9


Rys. 10


Rys. 11

Reguła sprowadzania każdej sytuacji do sytuacji dobrze nam znanej nie zawodzi i w tym przypadku. Zasugerujmy uczniom, że w dalszym ciągu odcięta bryła jest czworościanem o obliczonej już objętości V, tylko że ten czworościan trochę wystaje poza przecinany sześcian. Oczywiście to, co wystaje, należy od V odjąć.

Dla kątów między 45° a arctg2 sytuacja jest prosta: wystają dwa jednakowe i (co więcej) jednokładne z naszym dużym czworościanem jego rogi. Jeśli stosunek jednokładności oznaczymy przez λ, to w tym przypadku rezultatem będzie $V = w(1-2\lambda^3)$ – potęga 3 bierze się stąd, że to jest objętość.

Wykonanie rysunku dla pozostałego przypadku pokazuje, że tym razem rozważane rogi mają część wspólną – odjęliśmy zatem zbyt wiele. Ale baczniejsze przyjrzenie się rysunkowi pozwala dostrzec, że to, co odjęliśmy dwukrotnie, też jest czworościanem jednokładnym do dużego (względem jakiego punktu?). Oznaczając stosunek tej jednokładności przez μ, mamy więc tym razem $V = w(1-2\lambda^3+\mu^3)$.

Pozostaje już tylko obliczenie wartości λ i μ, ale to już jest wielokrotnie ćwiczony standard. Porównując długości odpowiednich odcinków w rozpatrywanych czworościanach, otrzymujemy

$$\lambda = \frac{\mathrm{tg}\alpha-1}{\mathrm{tg}\alpha} = 1-\mathrm{ctg}\alpha,\ \mu = \frac{\mathrm{tg}\alpha-2}{\mathrm{tg}\alpha} = 1-2\mathrm{ctg}\alpha$$

Jako morał można przyjąć powtarzające się spostrzeżenie, że rzeczy skomplikowane to kombinacja rzeczy prostych. A dla tych, co to muszą mieć wszystko zapisane „jednym wzorem”, można oczywiście wynik zapisać tak:

$$V = \begin{cases} \frac{1}{6}\mathrm{tg}^2\alpha, \text{ dla } \alpha \le 45° \\ \frac{1}{6}\mathrm{tg}^2\alpha(1-2(1-\mathrm{ctg}\alpha)^3), \text{ dla } 45° < \alpha \le \mathrm{arctg}2 \\ \frac{1}{6}\mathrm{tg}^2\alpha(1-2(1-\mathrm{ctg}\alpha)^3+(1-2\mathrm{ctg}\alpha)^3), \text{ dla } \mathrm{arctg}2 < \alpha \end{cases}$$

I nawet wtedy widać, że cała matematyka była wcześniej, niż w ogóle dotknęliśmy się standardowych wzorów i reguł.

Krzyżodziób

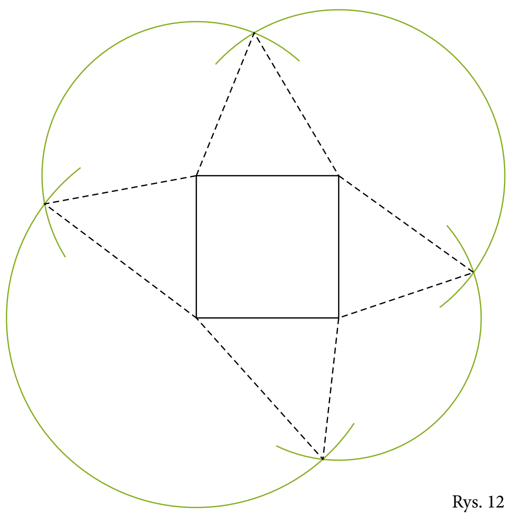
Spróbujmy rozwiązać następujące, prawie manualne zadanie.

Narysować siatkę ostrosłupa, którego podstawą jest kwadrat i którego każda krawędź boczna jest innej długości.

Tu niezbędna jest uwaga: aby zadanie odegrało swoją rolę, trzeba je zrealizować naprawdę, czyli narysować siatkę linijką i cyrklem na dość sztywnym kartoniku, po czym ją wyciąć (wypustki do klejenia nie są konieczne).

Rysunek 12 to następująca realizacja tego zamówienia: rysujemy kwadrat, w każdym jego wierzchołku stawiamy cyrkiel o innej rozwartości (ale zawsze co najmniej równej bokowi kwadratu) i zakreślamy okręgi. Przecięcia sąsiednich okręgów to wierzchołki ścian bocznych szukanego ostrosłupa.

I gdzie tu problem?

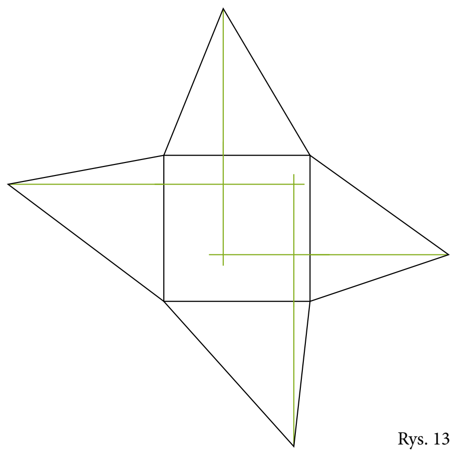


Rys. 12

Jeśli jednak wytniemy tę siatkę i spróbujemy ją złożyć, to z prawdopodobieństwem bliskim jedności (sprawdziłem to na ponad stu rysunkach wykonanych przez młodzież w bardzo różnym wieku) efekt będzie taki, jaki jest w narysowanym wyżej przypadku – powstanie tytułowy krzyżodziób. Mianowicie dwie sąsiednie ściany będą pasować do siebie nawzajem, dwie pozostałe też, ale wierzchołki powstałych w ten sposób „dziobków” nie spotkają się! Tak samo będzie, jeśli zaczniemy od innej pary sąsiednich ścian. Tu jest już miejsce na poważne pytanie: dlaczego tak się dzieje?

Odpowiedź mieści się w bardzo istotnym spostrzeżeniu, że w matematyce też istnieją – jak w fizyce – stopnie swobody. Nieprzestrzeganie takich ograniczeń prowadzi do sprzeczności. Ale gdzie tutaj pozwoliliśmy sobie na zbytnią swobodę?

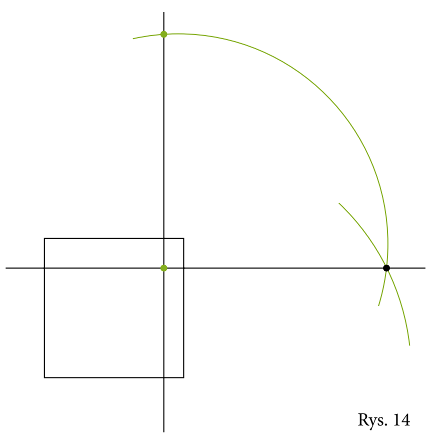
Otóż w dowolnym wyborze aż czterech różnych promieni kreślonych okręgów. O tym, jak ta sprzeczność się wyraża, informuje rysunek 13. Gdy narysujemy wysokość ściany bocznej, jej rzut prostokątny na podstawę będzie odcinkiem prostopadłym do krawędzi tej podstawy i będzie przechodził przez rzut „ostrego" wierzchołka na tę podstawę. Zatem wszystkie proste zawierające wysokości ścian bocznych, narysowane na siatce, muszą się spotkać w jednym punkcie podstawy – mianowicie w punkcie będącym rzutem na podstawę przyszłego „ostrego" wierzchołka. A tu tak nie jest.



Rys. 13

I teraz problem poprawnego narysowania siatki staje się bardziej złożony. Na ile swobody można sobie pozwolić i jak z niej skorzystać?

Pierwszy pomysł przychodzi do głowy od razu: zacząć od punktu będącego rzutem „ostrego" wierzchołka na podstawę – to on będzie tym razem „dodatkowym wielbłądem". Z tego punktu prowadzimy prostopadłe do krawędzi podstawy. Na jednej z nich obieramy odpowiednio daleko punkt. Po czym w jednym z wierzchołków stawiamy nóżkę cyrkla i kreślimy okrąg przechodzący przez ten punkt aż do przecięcia z kolejną prostą (rys. 14).



Rys. 14

Kontynuacja jest oczywista. Ale powstają dwa pytania:

- Czy konstrukcja się zamknie, czyli czy ostatni okrąg trafi w ten sam punkt na pierwszej prostej, od którego zaczęliśmy?
- Jak zapewnić, by wszystkie krawędzie boczne były innej długości?

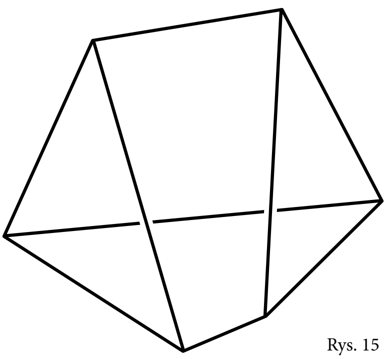
Rozstrzygnięcia obu tych problemów mieszczą się już w obrębie standardowo-obliczeniowej matematyki, więc pozwolę je sobie pominąć. Może jeszcze tylko dodam wskazówkę, że na drugie pytanie próbowałbym odpowiedzieć, wybierając początkowy punkt poza osiami symetrii podstawy.

Oczywiście, i tu są możliwe uogólnienia, gdyż kwadrat w podstawie ostrosłupa może być zamieniony na dowolny (?) wielokąt.

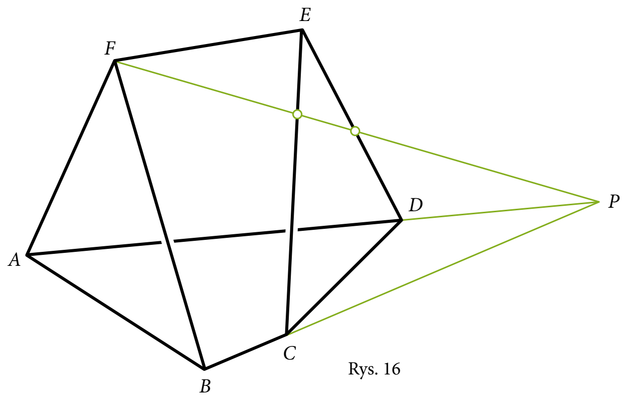
Wielościan, którego nie ma

Ostatnią sprawą, jaką chcę poruszyć w tym tekście, jest fakt, że matematyka pozwala również dowodzić, że jakieś obiekty nie istnieją. Niby jesteśmy z tym jakoś oswojeni. Z całą pewnością każdy (?) potrafi udowodnić, że nie ma dwóch różnych parzystych liczb pierwszych. Ale to wygląda jedynie na grę słów. Czy możliwe są sytuacje, gdzie niewątpliwie do dowodu potrzebna jest matematyka?

Rysunek 15 przedstawia wielościan (dokładniej: krawędzie wielościanu), który ma trzy ściany czworokątne i dwie trójkątne. Ma też bardziej egzotyczną własność – mianowicie, nie istnieje. I dowieść tego można za pomocą jak najbardziej standardowej matematyki.



Rys. 15



Rys. 16

Załóżmy (rys. 16), że ściany *ABCD*, *ADEF* i *BCEF* są wielokątami, a więc są płaskie. Wówczas punkt *P* przecięcia prostych *AD* i *BC* leży na każdej z nich. Skoro tak, to prosta *PF* przecina zarówno *CE* (jako leżąca na *BCEF*), jak też *DE* (jako leżąca na *ADEF*). Stąd wszystkie punkty leżą na jednej płaszczyźnie i rysunek wcale nie przedstawia wielościanu.

Zamiast zakończenia

A ogólny morał z tej całej opowiastki sformułował chyba najlepiej Bertold Brecht w epilogu do „Kariery Artura Ui": A wy się uczcie patrzeć, a nie gapić!

Bo to jest klucz do matematyki i, oczywiście, nie tylko do niej.

2. Piękno geometrycznych rozumowań

Stefan Mizia, Wrocław

W powszechnej opinii nauczycieli uczenie geometrii jest bardzo trudne. Równie trudne jest w powszechnej opinii uczniów jej opanowanie. Trudności te biorą się z niewielkiej liczby łatwych do wyuczenia algorytmów, które można w geometrii stosować. Nikt z nauczycieli nie wątpi jednak w ogromną przydatność nauki geometrii zarówno do kształtowania wyobraźni, jak i opanowania sztuki prowadzenia dedukcyjnych rozumowań. A jak przekonać uczniów do niezwykłej wagi, ale i uroku elementarnej geometrii (czyli tej uprawianej z wyłączeniem metod analitycznych, wektorowych i trygonometrycznych)? Prezentujemy tu przykłady „samouczących" zestawów zadań, które krok po kroku wprowadzają ucznia w tajniki geometrycznych rozumowań i stopniując ich trudność, pozwalają się w nich rozsmakować.

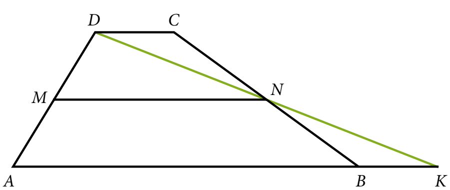
Mistrzostwa w geometrii

We Wrocławiu od wielu lat są organizowane otwarte Mistrzostwa w Geometrii Elementarnej. W ich szranki stają uczniowie gimnazjów i liceów, studenci matematyki, nauczyciele oraz pracownicy naukowi. Wszyscy rozwiązują te same zadania w tym samym czasie. Wyłączenie metod analitycznych, wektorowych i trygonometrycznych sprawia, że wynik tej rywalizacji nie jest z góry przesądzony, a gimnazjalista ma równe szanse z profesorem matematyki. Co ciekawe, dotąd zwycięzcami zawsze byli uczniowie. Jak się okazuje, w zmaganiach na dostrzeganie geometrycznych zależności i prowadzenie rozumowań ani wiek, ani doświadczenie zawodowe nie dają gwarancji wygranej. W tym właśnie tkwi urok geometrii elementarnej, ale także jej ogromny walor dydaktyczny.

Linia średnia w trapezie

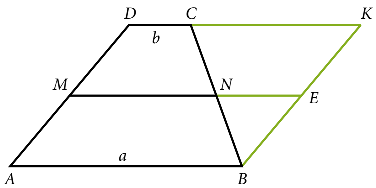
Nie bez znaczenia jest też fakt, że w innych działach matematyki trudno znaleźć zadania, które można rozwiązać na kilkanaście sposobów, wykorzystując jedynie najprostsze wiadomości: definicje, fakty i własności obiektów. Oto przykład takiego właśnie zadania i kilku sposobów jego rozwiązania. Wykorzystamy w nich wiedzę o linii średniej trójkąta oraz o cechach przystawania trójkątów.

Wykaż, że linia średnia w trapezie jest równoległa do podstaw i ma długość równą średniej arytmetycznej ich długości.



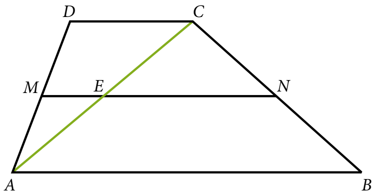
Rys. 1

Rozwiązanie 1. Niech MN jest linią środkową w trapezie $ABCD$. Przedłużamy AB i DN do przecięcia w punkcie K. Trójkąty DCN i NBK są przystające (cecha kbk), więc $|AK| = |AB|+|CD|$. Zauważmy, że MN jest linią średnią w trójkącie AKD, więc jest równoległa do AK i połowę krótsza, ckd.



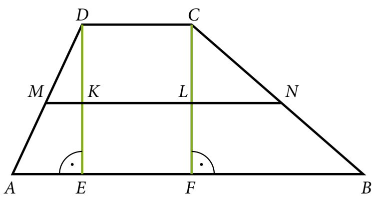
Rys. 2

Rozwiązanie 2. Uzupełniamy trapez $ABCD$ do równoległoboku $ABKD$ ($KB||AD$) i przedłużamy MN do przecięcia z KB w punkcie E. Wówczas NE jest linią średnią w trójkącie BCK, więc $NE||CK$, skąd także $MN||DC$. Ponieważ $|KC| = |AB|-|CD| = a-b$, mamy $NE = \frac{a-b}{2}$ oraz $|MN| = |ME|-|NE| = a-\frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$, ckd.



Rys. 3

Rozwiązanie 3. Niech E jest środkiem przekątnej AC. Wówczas E leży na MN (dlaczego?) oraz $ME||DC$ i $EN||AB$ jako linie średnie w odpowiednich trójkątach. Stąd $MN||AB$.
Ponadto $|MN| = |ME|+|EN| = \frac{1}{2}(|DC|+|AB|)$, ckd.



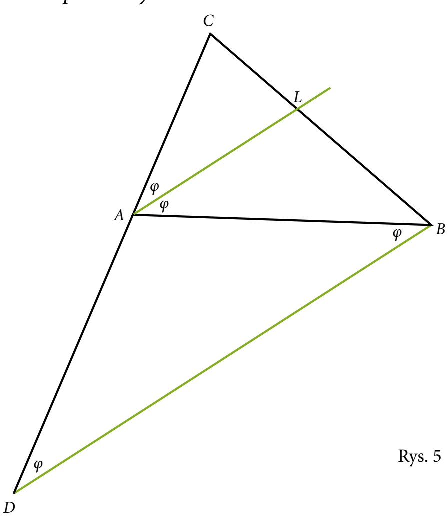
Rys. 4

Rozwiązanie 4. Niech DE i CF są wysokościami trapezu. Wówczas MK i LN są liniami średnimi trójkątów ADE i BCF. Stąd MK$||AB||LN$. Dalej $|MK| = \frac{1}{2}|AE|$ oraz $|LN| = \frac{1}{2}|FB|$. Dodając, mamy $|MK|+|LN| = \frac{1}{2}(|AE|+|FB|) = \frac{1}{2}(|AB|-|DC|)$. Ostatecznie $|MN| = |MK|+|KL|+|LN| = \frac{1}{2}(|AB|-|DC|)+|DC| = \frac{1}{2}(|AB|+|DC|)$, ckd.

Twierdzenie o dwusiecznej

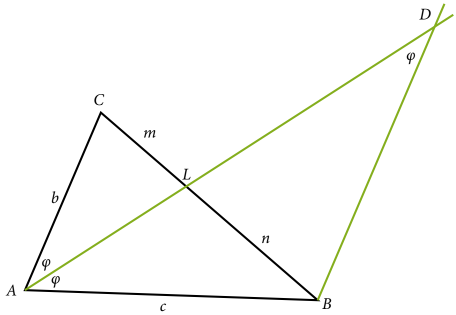
I jeszcze jeden przykład zadania z wieloma możliwymi rozwiązaniami. Wykorzystamy w nich własność symetrii trójkątów równoramiennych, wzór na pole trójkąta, twierdzenie Talesa, twierdzenie o kątach wpisanych w okrąg i cechy podobieństwa trójkątów.

Wykaż, że dwusieczna kąta wewnętrznego trójkąta dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne do dwóch pozostałych boków.



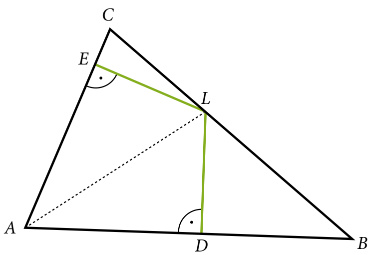
Rys. 5

Rozwiązanie 1. Niech AL jest dwusieczną kąta BAC. Przez B prowadzimy prostą równoległą do dwusiecznej AL aż do przecięcia z AC w punkcie D. Zauważmy, że $\measuredangle CAL \equiv \measuredangle LAB \equiv \measuredangle ADB \equiv \measuredangle ABD$. Zatem trójkąt ADB jest równoramienny i $AD \equiv AB$. Stąd i z twierdzenia Talesa mamy $\frac{CA}{AB} = \frac{CA}{AD} = \frac{CL}{LB}$, ckd.



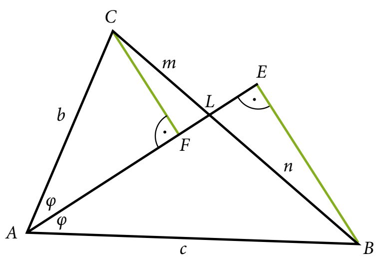
Rys. 6

Rozwiązanie 2. Przez B prowadzimy prostą równoległą do AC aż do przecięcia z AL w punkcie D. Mamy $\measuredangle CAL \equiv \measuredangle LAB \equiv \measuredangle LDB$. Stąd trójkąt ABD jest równoramienny i $|AB| = |BD| = c$. Trójkąt ACL jest podobny do trójkąta LDB (cecha kk), stąd $\frac{m}{b} = \frac{n}{c}$ i przekształcając, mamy $\frac{m}{n} = \frac{b}{c}$, ckd.



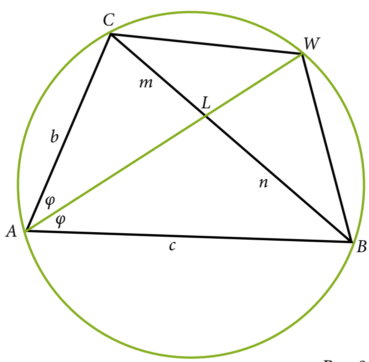
Rys. 7

Rozwiązanie 3. Niech P_1 i P_2 oznaczają odpowiednio pola trójkątów ALC i ALB. Trójkąty te mają wspólną wysokość opuszczoną na BC, więc $\frac{P1}{P2} = \frac{LC}{LB}$. Jednocześnie $\frac{P1}{P2} = \frac{AC}{AB}$, bo z definicji dwusiecznej $EL \equiv LD$. Stąd mamy tezę.



Rys. 8

Rozwiązanie 4. Z punktów B i C opuszczamy prostopadłe na AL. Ich spodki to odpowiednio punkty E i F. Zauważmy, że trójkąty AFC i AEB są podobne (cecha kk). Stąd $\frac{BE}{c} = \frac{CF}{b}$. Także trójkąty CFL i BEL są podobne (cecha kk), stąd $\frac{BE}{n} = \frac{CF}{m}$. Ostatecznie $\frac{BE}{CF} = \frac{c}{b} = \frac{n}{m}$, ckd.



Rys. 9

Rozwiązanie 5. Na trójkącie ABC opisujemy okrąg i przedłużamy dwusieczną AL do przecięcia z nim w punkcie W. Kąty ACB i AWB są przystające, jako wpisane, oparte na tym samym łuku. Stąd trójkąty AWB i ACL są podobne (cecha kk). Zatem $\frac{m}{b} = \frac{BW}{AW}$. Trójkąty AWB i WLB także są podobne (dlaczego?), więc $\frac{n}{BW} = \frac{c}{AW}$. Stąd $\frac{BW}{AW} = \frac{n}{c}$. Ostatecznie $\frac{m}{b} = \frac{n}{c}$, ckd.

W początkowej fazie nauczania geometrii zdecydowanie sprawdza się porzekadło o przechodzeniu ilości w jakość. Ważne jest, by uczeń miał możliwość wielokrotnego stosowania tych samych schematów i wiadomości w różnych sytuacjach zadaniowych. Pozwala to wyrobić właściwe nawyki, utrwalić dotychczasowe umiejętności oraz skoncentrować się na rozwiązywaniu nowych problemów.

Okrąg dziewięciu punktów

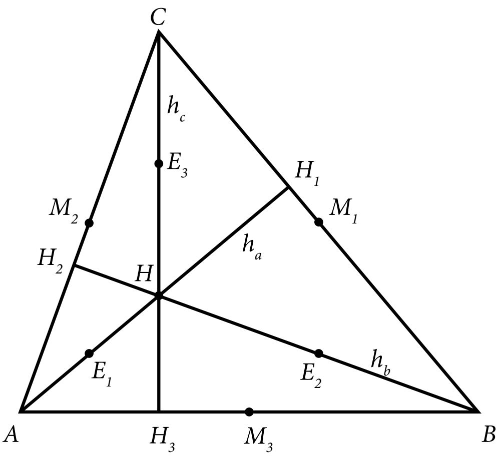
W następnym kroku proponujemy przykładowy zestaw zadań „samouczących", który prowadzi do odkrycia istnienia dla dowolnego trójkąta tak zwanego okręgu dziewięciu punktów. Zadanie to jest raczej trudne i o jego rozwiązanie może się pokusić zaledwie garstka najlepszych uczniów, jednak poprzedzone specjalnie dobraną serią zadań (będących właściwie rozpisanymi na drobniejsze kroki elementami rozwiązania), jest dostępne dla przeciętnego ucznia. Zadania w ciągu mają rosnący stopień trudności, jednak wzrost ten jest na tyle nieznaczny, że rozwiązując zadania po kolei, uczeń robi to zupełnie samodzielnie i nabiera doświadczenia potrzebnego do zadania następnego.

W kolejnych zadaniach wielokrotnie będziemy wykorzystywać dwa znane twierdzenia:

Fakt 1. Odcinek łączący środki boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i dwa razy od niego krótszy.

Fakt 2. W trójkącie prostokątnym środkowa opuszczona na przeciwprostokątną równa jest jej połowie (zatem dzieli wyjściowy trójkąt na dwa trójkąty równoramienne).

A teraz zapowiedziana seria zadań. We wszystkich przyjmujemy standardowe oznaczenia części trójkąta jak na rysunku 10. Ustalenie takich oznaczeń na stałe jest bardzo pomocne także na lekcjach.



Rys. 10

A, B, C – wierzchołki

a, b, c – boki przeciwległe do wierzchołków A, B, C

α, β, γ – kąty przy wierzchołkach A, B, C

h_1, h_2, h_3 – wysokości opuszczone na boki a, b, c

H_1, H_2, H_3 – spodki wysokości na bokach a, b, c

H – ortocentrum, punkt wspólny wysokości

E_1, E_2, E_3 – środki odcinków łączących A, B, C z ortocentrum

m_1, m_2, m_3 – środkowe opuszczone na boki a, b, c

M_1, M_2, M_3 – środki boków a, b, c

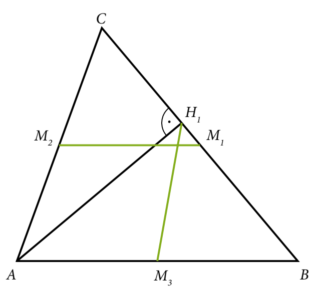
M – środek ciężkości, punkt wspólny środkowych

O – środek okręgu opisanego

R – promień okręgu opisanego

W – środek okręgu wpisanego

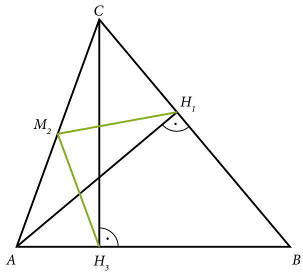
r – promień okręgu wpisanego



Rys. 11

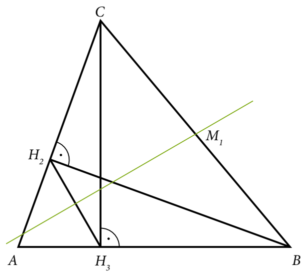
Zadanie 1. Wykaż, że $M_1M_2 = H_1M_3$.

Rozwiązanie. Z F1 w trójkącie ABC mamy $M_1M_2 = \frac{1}{2}AB$, a z F2 w trójkącie AH_1B mamy $H_1M_3 = \frac{1}{2}AB$. Stąd wynika teza.



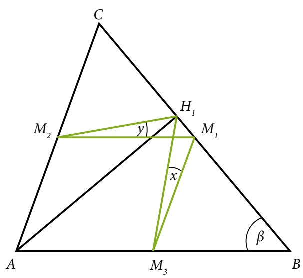
Rys. 12

Zadanie 2. Wykaż, że $H_1M_2 = H_3M_2$.
Rozwiązanie. Z F2 w trójkącie AH_1C mamy $H_1M_2 = \frac{1}{2}AC$, a w trójkącie AH_3C mamy $H_3M_2 = \frac{1}{2}AC$. Stąd wynika teza.



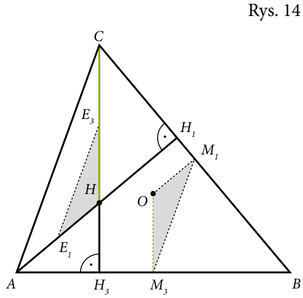
Rys. 13

Zadanie 3. Wykaż, że symetralna odcinka H_2H_3 przechodzi przez M_1.
Rozwiązanie. Z definicji symetralnej wystarczy pokazać, że $M_1H_2 = M_1H_3$. Tak jest, gdyż z F2 w trójkącie BH_3C mamy $M_1H_3 = \frac{1}{2}BC$, a w trójkącie BH_2C mamy $M_1H_2 = \frac{1}{2}BC$. Stąd wynika teza.



Rys. 14

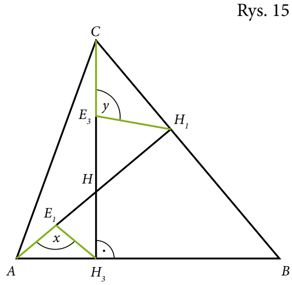
Zadanie 4. Wykaż, że $\measuredangle M_1M_3H_1 \equiv \measuredangle H_1M_2M_1$.
Rozwiązanie. Wprowadźmy oznaczenia: $\measuredangle M_1M_3H_1 = x$, $\measuredangle H_1M_2M_1 = y$. Z F2 w trójkącie AH_1B mamy $\measuredangle M_3H_1B = \beta$, a z F1 w trójkącie ABC mamy $\measuredangle M_1M_3B = \alpha$. Stąd $x = 180°-2\beta-\alpha = \gamma-\beta$. Z kolei z F2 w trójkącie AH_1C mamy $\measuredangle CM_2H_1 = 180°-2\gamma$, a z F1 w trójkącie ABC mamy $\measuredangle CM_2M_1 = \alpha$. Stąd $y = \alpha-(180°-2\gamma) = \gamma-\beta$. Zatem $x = y$, ckd.



Rys. 15

Jeśli dodamy kolejne twierdzenie, podane poniżej, będziemy mogli rozwiązać dalszą serię zadań.

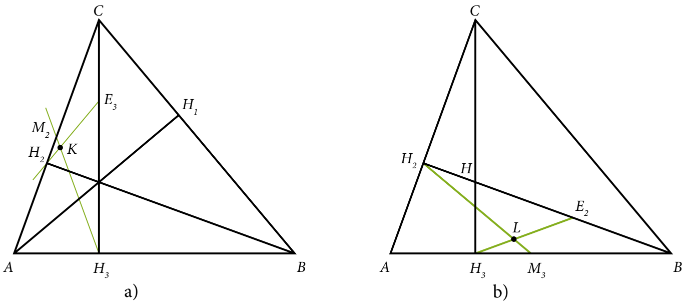
Fakt 3. Odległość wierzchołka trójkąta od ortocentrum jest dwa razy większa niż odległość środka okręgu opisanego na tym trójkącie od środka boku przeciwległego, np. $|CH| = 2|OM_3|$.
Dowód. Zauważmy, że trójkąty E_1HE_3 i M_3OM_1 są przystające (cecha kbk: $|\mathrm{E}_1\mathrm{E}_3| = |\mathrm{M}_1\mathrm{M}_3|$ z F1 w odpowiednich trójkątach oraz boki parami równoległe, co daje równość odpowiednich kątów). Wobec określenia punktu E_3 mamy tezę.



Rys. 16

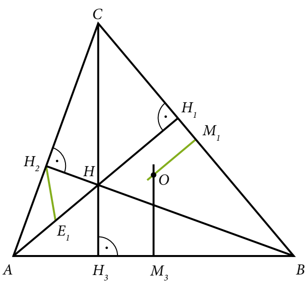
Zadanie 5. Wykaż, że $\measuredangle AE_1H_3 \equiv \measuredangle CE_3H_1$.
Rozwiązanie. Zauważmy, że trójkąty HE_3H_1 i HH_3E_1 są równoramienne (z F2 w odpowiednich trójkątach) i podobne (cecha kk), przy czym $\measuredangle E_3H_1H \equiv \measuredangle E_3HH_1 \equiv \measuredangle H_3HE_1 \equiv \measuredangle E_1H_3H$. Dane w treści kąty są kątami zewnętrznymi do odpowiadających sobie kątów w tych trójkątach, więc są przystające.

Zadanie 6. Wykaż, że kąt między prostymi H_3M_2 i H_2E_3 jest taki sam jak między prostymi H_2M_3 i H_3E_2.



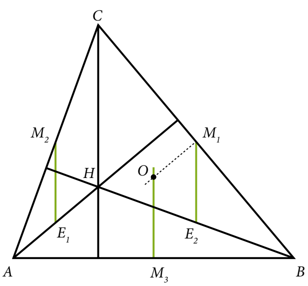
Rys. 17

Rozwiązanie. Niech H_3M_2 i H_2E_3 przecinają się w punkcie K. Ich kąt przecięcia wynosi $\measuredangle H_2KM_2 =$ $= 180°-(\measuredangle CH_2E_3+\measuredangle AM_2H_3)$, a to jest równe (na mocy F2 w odpowiednich trójkątach) $180°-(90°-\alpha+180°-2\alpha) =$ $= 3\alpha-90°$. Niech H_2M_3 i H_3E_2 przecinają się w L. Ich kąt przecięcia wynosi $\measuredangle H_3LM_3 = 180°-(\measuredangle E_2H_3B+\measuredangle H_2M_3A)$ a to jest równe (na mocy F2 w odpowiednich trójkątach) $180°-(90°-\alpha+180°-2\alpha) = 3\alpha-90°$, ckd.



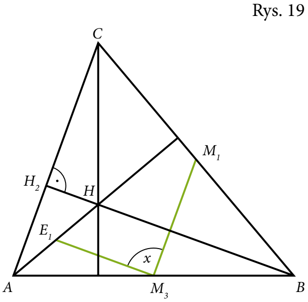
Rys. 18

Zadanie 7. Wykaż, że $E_1H_2 = OM_1$.
Rozwiązanie. Z F2 w trójkącie AHH_2 mamy $E_1H_2 = \frac{1}{2}AH$, a stąd na mocy F3 w trójkącie ABC dostajemy tezę.



Rys. 19

Zadanie 8. Wykaż, że $M_1E_2 = M_2E_1 = OM_3$.
Rozwiązanie. Z F1 w trójkątach AHC i BHC mamy odpowiednio $M_2E_1 =$ $= \frac{1}{2}CH$ i $M_1E_2 = \frac{1}{2}CH$. Stąd na mocy F3 w trójkącie ABC dostajemy tezę.

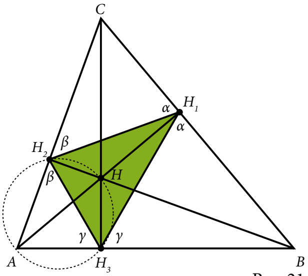


Rys. 20

Zadanie 9. Wykaż, że $\measuredangle E_1M_3M_1 = 90°$.
Rozwiązanie. Zauważmy, że $E_1M_3 || BH$ (z F1 w trójkącie ABH). Zatem $\measuredangle AM_3E_1 = \measuredangle ABH_2 = 90°-\alpha$. Z kolei $\measuredangle M_1M_3B = \alpha$ (z F1 w trójkącie ABC). Stąd $\measuredangle E_1M_3M_1 = 180°-(\alpha+90°-\alpha) = 90°$, ckd.

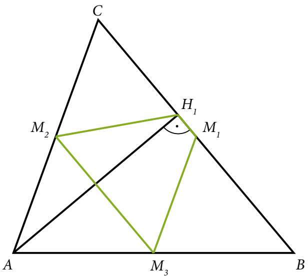
Teraz podamy jeszcze jedno twierdzenie pomocne w rozwiązaniu kolejnych zadań.

Fakt 4. Trójkąt, którego wierzchołkami są spodki wysokości pewnego trójkąta ostrokątnego ABC (tzw. trójkąt spodkowy), odcina od niego trzy trójkąty podobne do całości, przy czym $\measuredangle H_1H_3B = \measuredangle H_2H_3A = \gamma$, $\measuredangle H_3H_1B = \measuredangle H_2H_1C = \alpha$ oraz $\measuredangle H_3H_2A = \measuredangle H_1H_2C = \beta$.
Dowód. Rozważmy czworokąt AH_3HH_2. Można na nim opisać okrąg, ponieważ $\measuredangle AH_2H = \measuredangle AH_3H = 90°$. Zauważmy, że $\measuredangle AHH_3 = \measuredangle CHH_1$ (kąty wierzchołkowe) i $\measuredangle CHH_1 = 90° - \measuredangle H_3CB = 90° - (90° - \beta) = \beta$. Kąty AH_2H_3 i AHH_3 są oparte na tym samym łuku, stąd $\measuredangle AH_2H_3 = \beta$. Dla pozostałych kątów rozumowanie jest analogiczne.



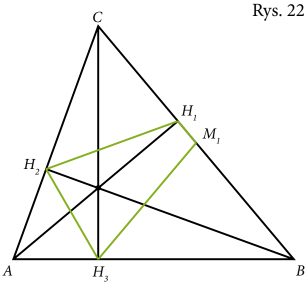
Rys. 21

Zadanie 10. Wykaż, że M_1, M_2, M_3 i H_1 leżą na jednym okręgu.
Rozwiązanie. Wystarczy pokazać, że $\measuredangle CH_1M_2 = \measuredangle M_1M_3M_2$ (dlaczego?). Zauważmy, że z F1 w trójkącie ABC mamy $\measuredangle M_1M_3B = \alpha$ oraz $\measuredangle M_2M_3A = \beta$. Stąd $\measuredangle M_2M_3M_1 = \gamma$. Z kolei z F2 w trójkącie AH_1C mamy $\measuredangle M_2H_1C = \gamma$, ckd.



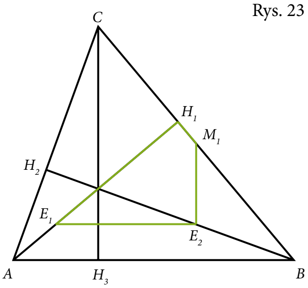
Rys. 22

Zadanie 11. Wykaż, że H_1, H_2, H_3 i M_1 leżą na jednym okręgu.
Rozwiązanie. Z F4 mamy $\measuredangle H_2H_3A = \gamma$, a z F2 w trójkącie CH_3B mamy $\measuredangle M_1H_3B = \beta$. Stąd $\measuredangle H_2H_3M_1 = \alpha$. Ponadto z F4 mamy też $\measuredangle CH_1H_2 = \alpha$. Zatem $\measuredangle H_2H_1M_1 + \measuredangle H_2H_3M_1 = 180° - \alpha + \alpha = 180°$, ckd.



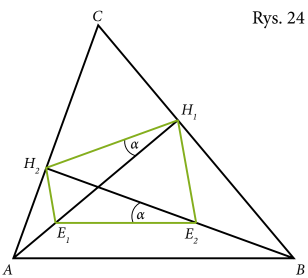
Rys. 23

Zadanie 12. Wykaż, że E_1, E_2, M_1 i H_1 leżą na jednym okręgu.
Rozwiązanie. Wystarczy pokazać, że $\measuredangle H_1E_1E_2 = \measuredangle BM_1E_2$ (dlaczego?).
Zauważmy, że $E_1E_2 || AB$ (z F1 w trójkącie AHB).
Stąd $\measuredangle H_1E_1E_2 = 90° - \beta$. Z kolei $E_2M_1 || CH$ (z F1 w trójkącie CHB).
Stąd $\measuredangle BM_1E_2 = \measuredangle BCH_3 = 90° - \beta$, ckd.



Rys. 24

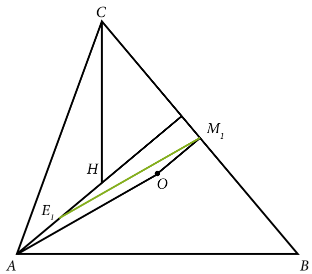
Zadanie 13. Wykaż, że H_1, H_2, E_1 i E_2 leżą na jednym okręgu.
Rozwiązanie. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o kątach wpisanych wystarczy pokazać, że $\measuredangle H_2H_1E_1 = \measuredangle H_2E_2E_1$. Zauważmy, że z F4 mamy $\measuredangle H_2H_1E_1 = 90° - \alpha$. Z kolei z F1 $E_1E_2 || AB$ i stąd $\measuredangle E_1E_2H_2 = \measuredangle ABH_2 = 90° - \alpha$, ckd.



Rys. 25

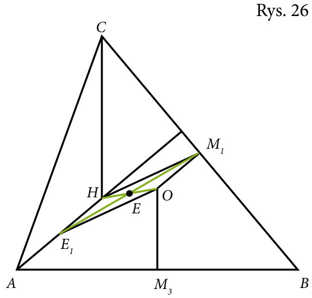
Zauważmy, że nauczyciel w razie potrzeby może sformułować dziesiątki analogicznych zadań.

Teraz „odkrycie" okręgu dziewięciu punktów (zwanego też okręgiem Eulera) nie sprawi uczniom kłopotu. Wystarczy rozwiązać kolejne zadania. Sceptycy powiedzą, że przez cały czas uczniowie są prowadzeni „za rękę". To prawda, ale nie zmienia to faktu, że kolejne kroki potrafili pokonać samodzielnie i nabrali znacznej wprawy w rozumowaniach geometrycznych.



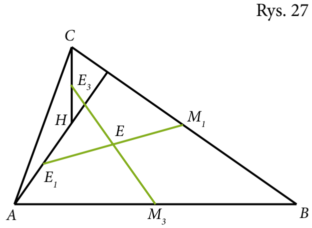
Rys. 26

Zadanie 14. Wykaż, że $M_1E_1 = M_2E_2 = M_3E_3 = R$.
Rozwiązanie. Aby pokazać $M_1E_1 = R$, wystarczy zauważyć z F3, że czworokąt AOM_1E_1 jest równoległobokiem. Pozostałe równości pokazuje się analogicznie.



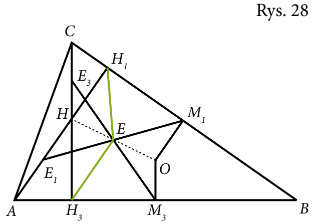
Rys. 27

Zadanie 15. Wykaż, że odcinki OH i M_1E_1 przecinają się w połowie.
Rozwiązanie. Oznaczmy punkt wspólny danych odcinków przez E. Wystarczy zauważyć z F3, że czworokąt E_1OM_1H jest równoległobokiem, a OH i M_1E_1 jego przekątnymi.



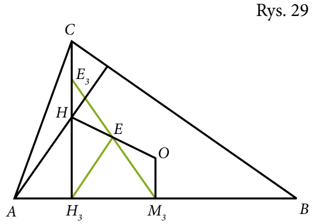
Rys. 28

Zadanie 16. Wykaż, że odcinki M_1E_1, M_2E_2, M_3E_3 przecinają się w połowie.
Rozwiązanie. Aby pokazać, że M_1E_1 połowi M_3E_3, wystarczy zauważyć (z F1 w odpowiednich trójkątach), że czworokąt $M_1E_3E_1M_3$ jest równoległobokiem, a dane odcinki są jego przekątnymi. Pozostałe równości pokazuje się analogicznie.



Rys. 29

Zadanie 17. Wykaż, że $EH_1 = EH_2 = EH_3$, gdzie E jest środkiem odcinka OH.
Rozwiązanie. Aby pokazać, że $EH_1 = EH_3$, wystarczy skorzystać z F2 w trójkątach $E_1H_1M_1$ (stąd $EH_1 = EM_1$) oraz $E_3H_3M_3$(stąd $EH_3 = EM_3$). Z zadań 14 i 16 $EM_1 = EM_3$, ckd. Pozostałe równości pokazuje się analogicznie.



Rys. 30

Zadanie 18. Wykaż, że punkty E_1, E_2, E_3, M_1, M_2, M_3, H_1, H_2 i H_3 leżą na jednym okręgu.
Rozwiązanie. Wystarczy pokazać, że $EE_i = EM_i = EH_i = \frac{1}{2}R$ dla $i = 1, 2, 3$. Dowód dla $i = 3$ wynika z F2 w trójkącie $E_3H_3M_3$. Pozostałe równości pokazuje się analogicznie.

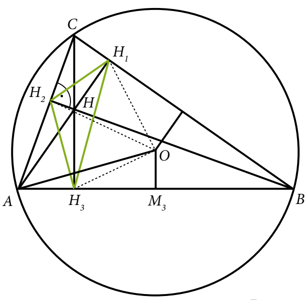
Zaprezentowane wyżej zadania rozwiązywałem z uczniami pierwszych klas gimnazjalnych. Nikomu nie sprawiły większego kłopotu, być może dlatego, że uczniom słabszym podrzucałem dodatkowy materiał do ćwiczeń, wszak zadań podobnego typu można ułożyć wiele. Można też skorzystać z mojej książki „Wykaż, że…" (DWE, 2011).

Z drugiej strony temat *Okrąg Eulera* brzmiał na tyle intrygująco, że nie miałem kłopotu z zachęceniem uczniów do rozwiązywania tych zadań. Korzystając z kilku prostych faktów, szybko nauczyli się prawidłowego wnioskowania i nabrali sporo intuicji tak ważnej w geometrii. Myślę, że na zawsze pozbyli się strachu przed zadaniami zaczynającymi się od złowrogich słów „wykaż, że", które są zmorą większości uczniów.

Chcę podkreślić, że powyższe zajęcia adresowane były do wszystkich uczniów, a nie tylko do tych o predyspozycjach i ambicjach olimpijskich. Dla jednych był to dobry wstęp do rozwijania zainteresowań geometrią, a dla drugich – pole, na którym zdobywali pewność siebie i satysfakcję z własnych dokonań.

Urok geometrycznych zadań

Aby nawiązać do tytułu tego rozdziału, proponuję rozwiązanie jeszcze dwóch zadań.



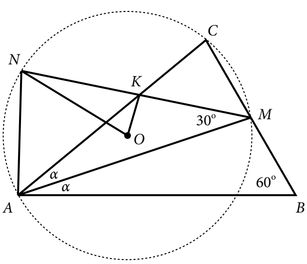
Rys. 31

Zadanie 19. Wykaż, że $P_{ABC} = p_H R$, gdzie p_H oznacza połowę obwodu trójkąta spodkowego.

Rozwiązanie. $P_{\Delta ABC} = P_{AH_3OH_2} + P_{H_3BH_1O} + P_{CH_2OH_1}$. Rozważmy czworokąt AH_3OH_2. Zauważmy, że $AO \perp H_2H_3$, bo $\measuredangle OAH_3 = 90° - \gamma$ (jako że $\measuredangle AOM_3 = \frac{1}{2}\measuredangle AOB = \gamma$) oraz $\measuredangle H_2H_3A = \gamma$ (na mocy F4).

Zatem $P_{AH_3OH_2} = \frac{1}{2}|OA|\cdot|H_2H_3| = \frac{1}{2}R\cdot|H_2H_3|$. Pola pozostałych czworokątów wyrażamy analogicznie, ckd.

Urok tego zadania polega na zestawieniu zaskakującej tezy (przeciętnemu uczniowi, a nawet wielu nauczycielom, pojęcie trójkąta spodkowego i jego własności są nieznane) z elementarnym dowodem.



Rys. 32

Zadanie 20. W trójkącie ABC, w którym $\beta = 60°$, dwusieczna kąta α przecina bok BC w punkcie M. Na boku AC obrano taki punkt K, że $\measuredangle AMK = 30°$. Znajdź miarę kąta OKC, gdzie O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AMC.

Rozwiązanie. Niech $\measuredangle BAC = 2\alpha$. Wówczas $2\alpha + \measuredangle ACB + 60° = 180°$.

Dalej $\measuredangle CKM = \alpha + 30°$ (jako zewnętrzny kąt trójkąta AKM oraz $\measuredangle KMC = 180° - (\alpha + 30°) - \measuredangle ACB = 180° - (\alpha + 30°) - 120° + 2\alpha = \alpha + 30°$.

Stąd $\measuredangle CKM \equiv \measuredangle KMC$, czyli trójkąt CKM jest równoramienny. Niech N będzie punktem przecięcia prostej MK z okręgiem opisanym na trójkącie AMC. Zauważmy, że $\measuredangle NAC \equiv \measuredangle NMC$, gdyż są oparte na tym samym łuku. Wobec tego trójkąty AKN i KMC są podobne (cecha kk), więc oba są równoramienne i $AN \equiv NK$. Ale $AN = R$ (promień okręgu opisanego na trójkącie AMC), ponieważ kąt wpisany oparty na AN ma 30°. Stąd $AN = KN = AO = R$, co znaczy, że punkty K, N i O leżą na okręgu o środku w N oraz że trójkąt ONA jest równoboczny, czyli $\measuredangle ONA = 60°$. Zatem $\measuredangle AKO = 30°$ jako wpisany oparty na łuku AO. Stąd $\measuredangle OKC = 150°$.

Nie było to łatwe zadanie. Jak wpaść na takie rozwiązanie? A może ktoś znajdzie prostsze?

Zamiast zakończenia

Chciałbym jeszcze podzielić się moim głębokim przekonaniem, że ogromną rolę w kształtowaniu u uczniów wszelkich kompetencji (nie tylko umysłowych) odgrywa dbałość o jakość komentarza do prowadzonych rozumowań. Nie wolno pozwolić na lekceważenie umiejętności redagowania rozwiązań, na stosowanie nieprecyzyjnego i niechlujnego języka. W ten sposób, ucząc geometrii, możemy także wychowywać. A nie wiemy, co w przyszłości okaże się bardziej przydatne.

3. Dowody geometryczne w praktyce

Małgorzata Mikołajczyk, Wrocław

W tak zwanych zadaniach na dowodzenie spory problem stwarza nie tylko umiejętność przeprowadzenia poprawnego i pełnego rozumowania dedukcyjnego, ale także jego prezentacja. Dziś nikt nie uczy, w jaki sposób starannie notować tok rozumowania, by nie tworzyć przy tym długich wypracowań. Do tego dochodzi powszechne stosowanie zadań zamkniętych rozwiązywanych w formie testu wyboru lub testu krótkiej odpowiedzi oraz zgubna moda na zeszyty ćwiczeń. W efekcie uczeń nie ma okazji na zapisanie rozumowania swoimi słowami, a często nawet na werbalne wyrażenie własnych myśli i argumentów. Nie potrafi prowadzić notatek (tzn. wyłowić istotnych rzeczy wartych odnotowania) i nadać im samodzielnie pewnej struktury. A to są umiejętności ważne zarówno w późniejszym życiu zawodowym, jak i w dalszej edukacji na poziomie akademickim.

Problemy z notowaniem rozumowań

Wielokrotnie miałam okazję obserwować przy tablicy uczniów i nauczycieli prezentujących rozwiązania tak zwanych zadań na dowodzenie. Uderzająca była nieporadność, z jaką uczniowie artykułowali te rozwiązania. Często panował w nich logiczny chaos objawiający się w myleniu kierunku implikacji, powoływaniu się na twierdzenia proste zamiast na odwrotne (cechy przystawania lub podobieństwa, cechy podzielności, twierdzenie Pitagorasa lub Talesa), formalne luki w rozumowaniu, podawanie pozornie oczywistych faktów bez uzasadnienia.

Lepiej wypadali w tym porównaniu nauczyciele, ale oni też grzeszyli niestarannym zapisem, a wiadomo, że większość uczniów kopiuje do zeszytu tylko to, co się pojawia na tablicy, zatem istotne dla rozumowania argumenty podane słowami lub pokazane (metodą tzw. machania rękami) na rysunku na dłuższą metę umykają ich uwadze.

Tymczasem uczeń jest w szkole rozliczany ze swojej wiedzy na ogół na piśmie – podczas kartkówek i sprawdzianów. Wtedy jest pozbawiony owej możliwości machania rękami, więc rozpaczliwie (a czasem z premedytacją) produkuje długie i zagmatwane eseje, w których nauczycielowi trudno się potem połapać i odnaleźć klarowny wątek dedukcyjnego rozumowania. Przy prostych zadaniach i krótkich rozumowaniach problem ten nie ma może wielkiego znaczenia, ale staje się sporym wyzwaniem przy dłuższych, wieloetapowych rozumowaniach, na przykład geometrycznych.

Niewątpliwie przygotowanie ucznia do sprawdzianu powinno także obejmować umiejętność zwartej i przejrzystej prezentacji dedukcyjnego rozumowania na piśmie. Ten element nie występuje w podręcznikach szkolnych i skryptach z dydaktyki matematyki. Wielu nauczycieli na użytek własny i swoich uczniów wypracowuje różne zasady w tym względzie, choć większość, wzorem polskich podręczników akademickich, decyduje się na formę „wypracowania”, wprowadzając dla uproszczenia zapisu rozmaite skrócone formy notacji. Dla przeciętnego ucznia (a nawet dla wielu uczniów uzdolnionych) jest to jednak sztuka nie do opanowania, o czym każdy nauczyciel przekonuje się, sprawdzając klasówki z matematyki. Najłatwiejszym rozwiązaniem problemu wydaje się rzeczywiście stosowanie zadań zamkniętych, które są ponadto łatwe i szybkie do sprawdzenia, ale jest to raczej ucieczka przed problemem, a nie próba zmierzenia się z nim.

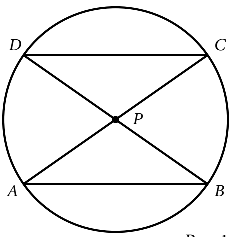
Jest na to lekarstwo

Co ciekawe, w anglosaskiej tradycji nauczania ten problem w ogóle nie istnieje, ponieważ tamtejsza dydaktyka matematyki uporała się z nim przed wielu laty. To rozwiązanie można znaleźć we wszystkich podręcznikach szkolnych do matematyki i dziwi tylko, że nikt z polskich autorów nie chciał nigdy z niego skorzystać. Są to tak zwane zapisy dwukolumnowe (*two-column proofs*). Opiszę je krótko i pokażę kilka przykładów zadań z tak właśnie zapisanymi rozwiązaniami.

Istotą dwukolumnowego zapisu rozwiązania jest klarowny podział na fakty i ich uzasadnienia oraz ponumerowanie tychże dla wygody późniejszych odwołań. Pierwszy numer mają zawsze założenia podane w treści zadania, a ostatni – teza, jaką mamy wykazać. Ten sposób pozwala łatwo kontrolować, czy jakiegoś kroku rozumowania nie wykonaliśmy bez uzasadnienia i czy nie ma w dowodzie żadnych luk. Ponadto zapis faktów i uzasadnień w kolumnach powinien być zwięzły i czytelny, dlatego zachęcamy uczniów do używania wszelkich ustalonych przez obie strony (lub po prostu standardowych) form skróconej notacji.

Dowody dwukolumnowe

Oto kilka przykładów zadań i ich rozwiązań ujętych w formę zapisu dwukolumnowego.

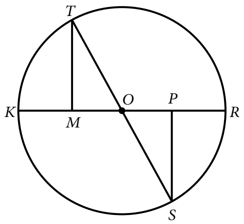


Rys. 1

Zadanie 1. Wykaż, że prowadząc w okręgu dwie dowolne średnice i łącząc końce jednej z nich z końcami drugiej, otrzymamy pary odcinków przystających.
Dane: okrąg o środku P
Wykazać: $AB \equiv CD$

FAKTY	UZASADNIENIA
1. o(P), AD i CB – średnice	1. dane
2. $PA \equiv PB \equiv PC \equiv PD$	2. definicja okręgu, promienie ≡
3. $\measuredangle CPD \equiv \measuredangle APB$	3. kąty wierzchołkowe ≡
4. $\Delta CPD \equiv \Delta APB$	4. bkb (2, 3, 2)
5. $AB \equiv CD$	5. OCPTP

Rozumowanie jest pełne, proste i czytelne. Rozszyfrowania wymaga jedynie ostatni użyty skrót. Polecam jego wprowadzenie, jest to bowiem często występujący w zadaniach geometrycznych argument, choć rzadko używany (najczęściej zastępowany machaniem rękami): OCPFP = *Odpowiednie Części Przystających Figur Przystają* (w powyższym przypadku figury to trójkąty).



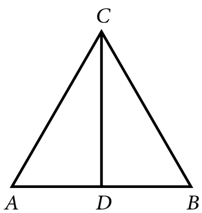
Rys. 2

Zadanie 2. Wykaż, że rzuty prostopadłe końców dowolnej średnicy okręgu na inną średnicę leżą w jednakowej odległości od środka okręgu.

Dane: okrąg o środku P, $\measuredangle TMO = \measuredangle SPO = 90°$

Wykazać: $MO \equiv PO$

FAKTY	UZASADNIENIA
1. o(O)	1. dane
2. $\measuredangle TMO = \measuredangle SPO = 90°$	2. dane
3. $OT \equiv OS$	3. definicja okręgu, promienie $\equiv$
4. $\measuredangle MOT \equiv \measuredangle POS$	4. kąty wierzchołkowe $\equiv$
5. $\measuredangle MTO = 90° - \measuredangle MOT$	5. 2 i suma $\measuredangle$ w Δ prostokątnym
6. $\measuredangle PSO = 90° - \measuredangle POS$	6. 2 i suma $\measuredangle$ w Δ prostokątnym
7. $\measuredangle MTO \equiv \measuredangle PSO$	7. 4 i monotoniczność –
8. $\Delta MOT \equiv \Delta POS$	8. cecha kbk (4, 3, 7)
9. $MO \equiv PO$	9. OCPTP



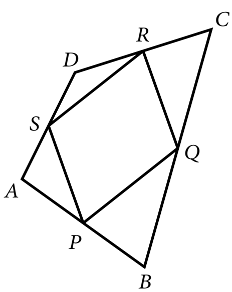
Rys. 3

Zadanie 3. Wykaż, że w trójkącie równoramiennym środkowa podstawy jest dwusieczną kąta. (Przez podstawę rozumiemy bok niebędący ramieniem.)

Dane: $AC \equiv BC$, $AD \equiv BD$

Wykazać: $\measuredangle ACD \equiv \measuredangle BCD$

FAKTY	UZASADNIENIA
1. $AC \equiv BC$	1. dane
2. $AD \equiv BD$	2. dane
3. $CD \equiv CD$	3. zwrotność $\equiv$
4. $\Delta ACD \equiv \Delta BCD$	4. bbb (1, 2, 3)
5. $\measuredangle ACD \equiv \measuredangle BCD$	5. OCPTP



Rys. 4

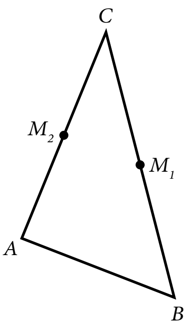
Zadanie 4. Wykaż, że łącząc środki kolejnych boków dowolnego czworokąta, otrzymamy równoległobok.

Dane: $ABCD$ – czworokąt, P, Q, R, S – środki boków

Wykazać: $|PQ| = |RS|$

FAKTY	UZASADNIENIA
1. P, Q, R, S środki boków	1. dane
2. $|PQ| = \frac{1}{2}|AC|$	2. F1 w ΔABC
3. $|SR| = \frac{1}{2}|AC|$	3. F1 w ΔACD
4. $|PQ| = |SR|$	4. przechodniość =

F1 oznacza (jak w poprzednim rozdziale) fakt 1, czyli własność linii środkowej trójkąta.
W takim razie na koniec zapiszmy w formie dwukolumnowej dowód faktu 1.



Rys. 5

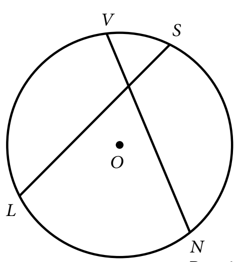
Zadanie 5. Wykaż, że odcinek łączący środki boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i dwa razy od niego krótszy.
Dane: trójkąt ABC, M_1, M_2 – środki boków
Wykazać: $M_1M_2 || AB$, $|M_1M_2| = \frac{1}{2}|AB|$

FAKTY	UZASADNIENIA
1. M_1, M_2 – środki boków	1. dane
2. $M_1M_2 \| AB$	2. (tw. Talesa)$^{-1}$
3. $\measuredangle CM_1M_2 \equiv \measuredangle CBA$	3. z 2
4. $\measuredangle M_2CM_1 \equiv \measuredangle ACB$	4. zwrotność $\equiv$
5. $\Delta M_2M_1C \approx \Delta ABC$	5. cecha kk (3, 4)
6. $\|M_1M_2\| = \frac{1}{2}\|AB\|$	6. OCPTP

Tym razem skrót OCPTP należy rozszyfrować jako *Odpowiednie Części Podobnych Trójkątów są Proporcjonalne*, gdyż dotyczy części o wymiarach liniowych. Gdyby dotyczył części o wymiarach kątowych, oznaczałby: *Odpowiednie Części Podobnych Trójkątów Przystają*.

Wygląda to na formalną zabawę w dowodzenie prostych twierdzeń, ale ta zabawa daje wymierne efekty. Uczeń skupia się na geometrycznej interpretacji treści zadania i przeprowadzeniu poprawnego rozumowania, a nie na sposobie jego zapisu. Taka notacja jest krótka, przejrzysta i łatwa do sprawdzania, porządkuje sposób myślenia i widać wszystkie pozostawione luki. Poglądowo uczy, czym tak naprawdę jest dedukcja i że nie ma w niej miejsca na (zwodnicze często) wytrychy typu „to widać".

Aby wdrożyć uczniów do tabelkowej notacji rozumowań, można początkowo stosować zadania zamknięte „na dowodzenie" typu testu uzupełnienia. Oto przykład.



Rys. 6

Zadanie 6. Wykaż, że iloczyn długości odcinków utworzonych na każdej z przecinających się cięciw jest stały.
Dane: okrąg o środku P
Wykazać: …..

…………………..	……………..
1. …………	1. dane
2. $\angle LVN \equiv \angle LSN$	2. …………...
3. $\angle VLS \equiv \angle VNS$	3. …………..
4. $\Delta LVE \approx \Delta NSE$	4. ……. (…..)
5. …………	5. OCPTP
6. $EV \cdot EN = EL \cdot SE$	6. …………..

Zamiast zakończenia

Propaguję taki sposób notowania rozwiązań zadań z geometrii od wielu lat i zawsze spotyka się on z dużym uznaniem ze strony nauczycieli. Kilka artykułów na ten temat (fakt, że nie zawsze przychylnych opisanej metodzie) zamieściły czasopisma metodyczne dla nauczycieli matematyki. Z dużym rozczarowaniem muszę jednak przyznać, że z niezrozumiałych dla mnie względów dowodom dwukolumnowym nadal nie udało się przeniknąć do praktyki nauczania w polskich szkołach. Co więcej, znajdują one krytyków, zarzucających tej metodzie szkodliwość dydaktyczną, skupianie się na kwestiach drugorzędnych, czyli na sposobie zapisu, uwypuklenie roli formalizmów i odciąganie uwagi ucznia od meritum, czyli od precyzji i poprawności prowadzonego rozumowania. Jest to jednak nieporozumienie. Nie chodzi tu bowiem o tabelki i formalizmy, ale właśnie o zwrócenie uwagi na meritum, czyli potrzebę prowadzenia rozumowań oraz umiejętność ich jasnego i poprawnego komunikowania. Każdy doświadczony nauczyciel wie, że zmorą nauczania matematyki jest przekonanie uczniów do tego, że wyników nie można podawać bez uzasadnienia lub prezentować w sposób nieprecyzyjny, np. mówiąc „korzystam z podobieństwa" bez podawania jakich trójkątów ono dotyczy, jakie są powody tego podobieństwa i jaka jest w nim odpowiedniość części rozważanych trójkątów. W wielu wypadkach prowadzi to do formalnych i merytorycznych błędów w rozwiązaniach. Każdy doświadczony nauczyciel wie także, jaką „katorgą" jest brnięcie w niejasno zapisane pod względem matematycznym i logicznym rozumowanie ucznia.

W nowym systemie powszechnych egzaminów z matematyki większą wagę przywiązuje się do podawania przez uczniów pełnych argumentacji i prezentowania toku rozumowania. Problem polega na tym, że uczeń nie opanuje tej umiejętności „sam z siebie" i należy go tego nauczyć, a nie tylko wymagać i sprawdzać stopień opanowania tej umiejętności. Problem ten dotyczy głównie uczniów biorących udział w konkursach i olimpiadach matematycznych, gdzie wymagane jest przedstawienie pełnego toku rozumowania. Uczeń powinien trenować tę umiejętność już od szkoły podstawowej, a nauczyciel powinien mieć świadomość wagi tego zadania i posiadać odpowiednie narzędzia dydaktyczne, aby tę umiejętność u ucznia wykształcić. Olimpijczykiem nikt się nie rodzi, nawet jeśli rodzi się z predyspozycjami do bycia nim. Konieczna jest praca nauczyciela, aby taki talent wykształcić i „oszlifować", wyposażając w niezbędne umiejętności, wśród których podstawową jest prezentacja poprawnego toku rozumowania.

4. Dynamiczne nauczanie geometrii

Piotr Zarzycki, Gdańsk

Wprowadzenie technologii otwiera nowe możliwości interaktywnego nauczaniu geometrii przez samodzielne badanie i odkrywanie własności figur i związków między nimi. Przedstawimy tu przykłady problemów geometrycznych z różnych etapów edukacyjnych, w rozwiązaniu których wykorzystane będą programy do dynamicznej geometrii. Opiszemy proces badawczy, sposób dochodzenia do rozwiązania i wynikające z niego wnioski. Wskażemy też zalety takiego stylu pracy z uczniami zdolnymi.

Programy do dynamicznej geometrii

Historyczne już pojawienie się w 1988 roku na kongresie ICME (*International Congress on Mathematical Education*) w Budapeszcie programu Cabri zapoczątkowało używanie interaktywnego oprogramowania do nauki geometrii na szerszą skalę. Interaktywność oznacza tutaj, że program reaguje na komendy użytkownika wydawane na przykład w trybie *drag-mode* (tzn. że obiekt swobodny można za pomocą myszy „ciągnąć", zmieniając jego położenie lub kształt, a obiekty z nim związane zachowują swoje z nim relacje). Jednak ani Cabri, ani inne podobne programy (np. Geometer's Sketchpad, Compasses & Ruler, Cinderella czy GeoGebra) nazywane ogólnie DGS (*Dynamic Geometry Software*) właściwie nie zmieniły praktyki nauczania geometrii w Polsce. DGS pojawia się w niej sporadycznie, a podczas zajęć z uczniami zdolnymi – szczególnie rzadko.

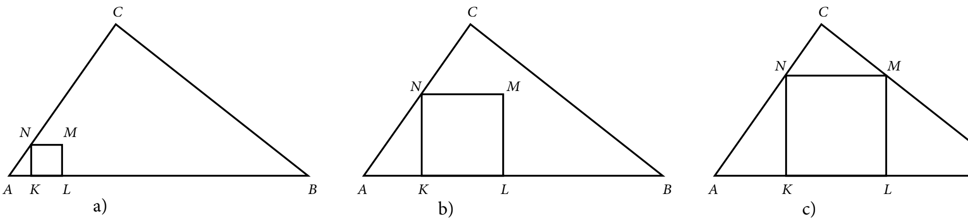
Poniższe przykłady mają na celu pokazanie zalet używania DGS na zajęciach z uczniami zdolnymi. Oczywiście uczniowie powinni wcześniej poznać podstawy obsługi wybranego programu, ale nie warto poświęcać na to zbyt wiele czasu. Najlepiej poznawać program na gorąco, gdy uczniowie rozwiązują konkretne zadania i poznają wybiórczo komendy potrzebne do rozwiązania tych właśnie problemów.

Kwadrat w trójkącie

Na początek rozważmy zadanie, które wielokrotnie się pojawiało w różnych konkursach matematycznych dla gimnazjalistów.

Mówimy, że wielokąt W *jest wpisany w wielokąt* V*, jeśli* $W \subset V$ *oraz wszystkie wierzchołki* W *leżą na brzegu wielokąta* V*. Dany jest dowolny trójkąt ABC. Skonstruuj kwadrat wpisany w ten trójkąt.*

Faza 1. Rozwiązanie eksperymentalne

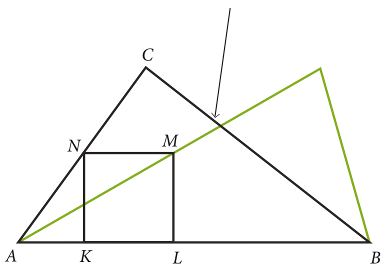


Rys. 1

1) Tworzymy kwadrat *KLMN*, którego trzy wierzchołki leżą na brzegu trójkąta *ABC*. Konstrukcję rozpoczynamy od punktu *K* wybranego na boku *AB*.
2) Zmieniamy położenie punktu *K* na boku *AB*. Program pozwala swobodnie przesuwać punkt po obiekcie. Jest interaktywny – dwie „strony", czyli komputer (program) i uczeń mogą się komunikować: komputer – pokazując komunikaty, uczeń – zmieniając położenie obiektów.
3) Eksperymentalnie znajdujemy kwadrat wpisany w trójkąt.

Faza 2. Rozwiązanie dynamiczne

W tym rozwiązaniu kluczowe jest znalezienie takiego położenia punktu *K* na boku *AB*, aby punkt *M* znalazł się na boku *BC*.



Gdy punkt *K* porusza się po boku *AB*, punkt *M* zostawia ślad (zieloną łamaną). Jej przecięcie z bokiem *BC* to poszukiwane położenie punktu *M*.

Rys. 2

Na tym etapie warto zadać uczniom pytania:

- Jak wykorzystać otrzymaną łamaną (zielony ślad) do konstrukcji kwadratu wpisanego w trójkąt?
- Dlaczego, rozpoczynając konstrukcję od punktu *M*, rzeczywiście otrzymamy kwadrat?

Kluczem do rozwiązania jest oczywiście własność jednokładności o środku *A*, obrazy punktu *N* leżą wtedy na *AC*, obrazy *K* i *L* leżą na *AB*, a obrazem kwadratu jest kwadrat.

Faza 3. Konstrukcja i dowód

Na tym etapie rozwiązanie konstrukcyjne można przeprowadzić zarówno na tablicy, jak i w programie DGS. Po przeprowadzeniu eksperymentów wiadomo już, co należy zrobić. Oto kolejne kroki postępowania.

- Skonstruować dowolny kwadrat *KLMN* z wierzchołkiem *N* na boku *AC* oraz wierzchołkami *K* i *L* na boku *AB* trójkąta *ABC*.
- Narysować półprostą *AM*.

- Wyznaczyć punkt *M'* przecięcia półprostej *AM* z bokiem *BC*.
- Zrzutować *M'* na *AB*, otrzymując *L'*.
- Skonstruować kwadrat *K'L'M'N'*.
- Uzasadnić poprawność konstrukcji.
- Przedyskutować liczbę rozwiązań zadania (ile jest kwadratów wpisanych w dany trójkąt i od czego ta liczba zależy – można to zagadnienie zbadać komputerowo).

W ten sposób otrzymaliśmy pełne rozwiązanie zadania. Sceptycy powiedzą, że zdolni uczniowie powinni poradzić sobie z rozpatrywanym zadaniem bez pomocy DGS. I pewnie mają rację, ale tu zapewne rozwiązywanie zadania zostałoby zakończone, podczas gdy z wykorzystaniem DGS praca nad problemem dopiero się zaczyna. DGS daje możliwość kontynuowania jej w dwóch zasadniczych kierunkach:

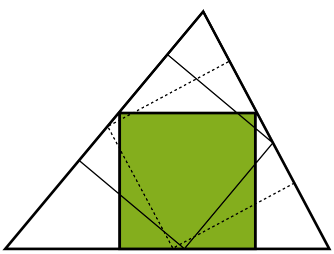
- automatyzacji rozwiązań poprzez tak zwane makrokonstrukcje,
- odkrywanie innych własności związanych z badanym problemem.

Faza 4. Makrokonstrukcja

Makrokonstrukcja w programie DGS to procedura wykonania konstrukcji obiektu geometrycznego (lub wielu obiektów) według następującego schematu:

obiekt początkowy → konstrukcja 1 → konstrukcja 2 → … →konstrukcja *k* → obiekt końcowy

Ale czym właściwie jest makrokonstrukcja? Można powiedzieć, że jest to konstrukcja geometryczna wykonana w DGS, w której wskazano obiekt początkowy oraz ciąg wykonywanych na nim operacji prowadzących do otrzymania obiektu końcowego, a całość zapisano w postaci pliku. Makrokonstrukcją może być na przykład opisanie okręgu na trójkącie. Wyznaczamy symetralne dwóch boków, zaznaczamy punkt ich przecięcia i kreślimy okrąg o środku w tym punkcie przechodzący przez wybrany wierzchołek trójkąta. Potem wskazujemy jako obiekt początkowy trójkąt, jako obiekty końcowe – okrąg i jego środek, nadajemy konstrukcji nazwę, na przykład opisz_okrąg_na_trójkącie i zapisujemy całość w pliku. Po narysowaniu nowego trójkąta wystarczy wywołać zapisaną makrokonstrukcję i automatycznie otrzymamy okrąg opisany na tym nowym trójkącie.



W rozpatrywanym zadaniu uczniowie powinni stworzyć makrokonstrukcję, która dla danego trójkąta wykreśli wszystkie wpisane weń kwadraty (trzy, jeśli jest to trójkąt prostokątny lub ostrokątny, albo jeden, jeśli trójkąt jest rozwartokątny.

Rys. 3.

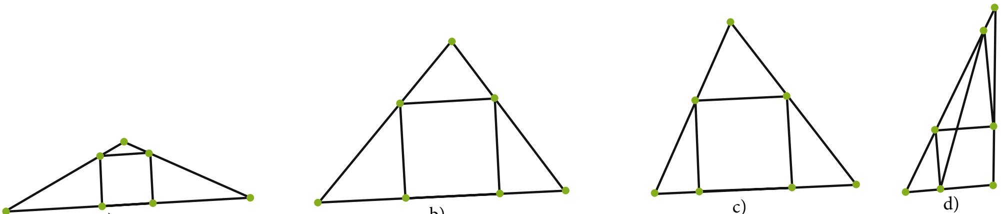
Jakie zalety ma tworzenie makrokonstrukcji?

- Uczy precyzyjnego i logicznego myślenia – bardzo często istotna jest kolejność wykonywanych kroków (etapów tworzenia makrokonstrukcji).
- Uczy algorytmizowania i myślenia algorytmicznego.
- Ma walor praktyczny – gotową makrokonstrukcję można wykorzystywać do rozwiązywania nowych, bardziej złożonych zadań.

Faza 5. Dalsze eksploracje

Dzięki opracowanej makrokonstrukcji można badać własności kwadratów wpisanych w dowolny trójkąt. Jak mogłaby wyglądać ta część zajęć?

Uczniowie obserwują, jak się zmieniają wpisane kwadraty przy zmianie kształtu i wielkości trójkąta.

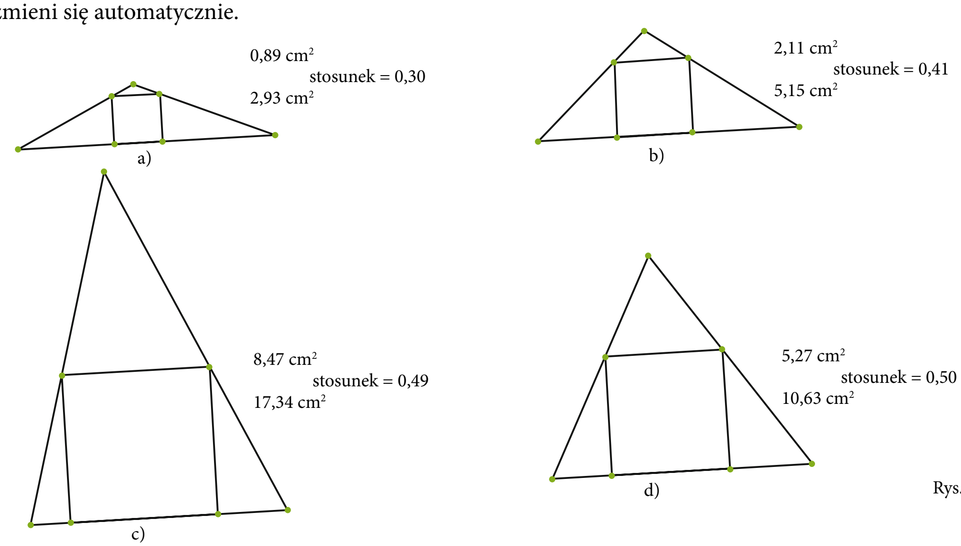


Rys. 4

Na rysunku 4 przedstawiono kilka takich sytuacji. Szczególnie ciekawy jest przypadek d), w którym makrokonstrukcja „produkuje" dziwną figurę, oczywiście niebędącą kwadratem. Warto, aby uczniowie wyjaśnili tę sytuację (dla trójkąta rozwartokątnego nie istnieją kwadraty wpisane o dwóch wierzchołkach leżących na krótszych bokach, chociaż wszystkie polecenia makrokonstrukcji dają się wykonać).

W mocniejszych zespołach nauczyciel nie powinien sugerować kierunku badań. Uczniowie powinni samodzielnie stawiać hipotezy, próbować je uzasadniać lub obalać. W słabszych grupach nauczyciel może podsunąć uczniom pomysły, co mogą badać (np. obwody lub pola obu figur i zależności między nimi – obwody i pola wielokątów są obliczane automatycznie przez kalkulator wbudowany w program).

Na rysunku 5. pokazane są efekty użycia takiego kalkulatora. Jeśli zmieniamy kształt trójkąta, stosunek ten zmieni się automatycznie.



Rys. 5

Oto prawidłowości zauważone przez uczniów podczas takich eksperymentów.

- Stosunek pola kwadratu wpisanego do pola trójkąta nie przekracza ½. Maksymalny stosunek tych pól (równy ½) jest osiągany dla trójkąta równobocznego.
- Stosunek obwodu kwadratu wpisanego do obwodu trójkąta nie przekracza 0,62. Maksymalny stosunek tych obwodów (równy $4/(3+2\sqrt{3}) \approx 0{,}62$) jest osiągany dla trójkąta równobocznego.

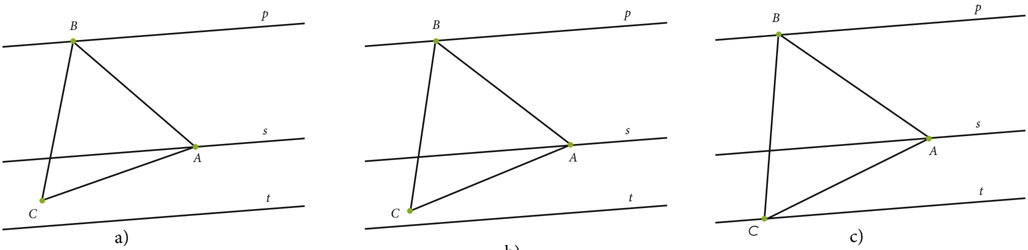
Oczywiście obie te własności należy teraz uzasadnić.

Trójkąt na prostych

Kolejne zadanie pochodzi z Olimpiady Matematycznej. Pokażemy, jak istotną rolę w jego rozwiązaniu może odegrać DGS.

Dane są trzy proste równoległe. Skonstruuj trójkąt równoboczny, którego wierzchołki leżą na tych prostych.

Faza 1. Rozwiązanie eksperymentalne

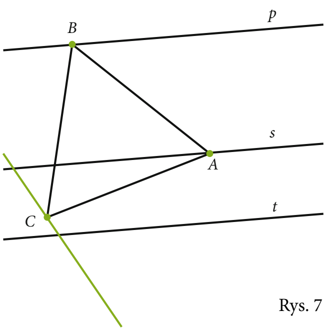


Rys. 6

1) Na jednej z prostych wybieramy punkt A, a na drugiej – punkt B. Następnie konstruujemy trójkąt równoboczny o boku AB. Są dwa takie trójkąty, więc wybieramy jeden z nich.
2) Zmieniamy położenie punktu A, przesuwając go po prostej s.
3) Eksperymentalnie znajdujemy poszukiwany trójkąt.

Faza 2. Rozwiązanie dynamiczne

Sprawdzimy, jak wygląda ślad punktu C, gdy punkt A porusza się po prostej, a punkt B jest nieruchomy.



Rys. 7

Gdy punkt A porusza się po prostej s, punkt C zostawia ślad (zieloną prostą). Jej przecięcie z prostą t to poszukiwane położenie punktu C.

Na tym etapie warto zadać uczniom pytania:

- Jak wykorzystać otrzymaną prostą (zielony ślad) do konstrukcji trójkąta równobocznego o wierzchołkach na trzech danych prostych?
- Dlaczego ten ślad to prosta?
- Jak skonstruować tę prostą?

Prosta zielona jest obrazem prostej s przy obrocie o $60°$ przeciwnie do ruchu wskazówek zegara wokół B. Punkt C można otrzymać w inny sposób: punkt A jest nieruchomy, a prostą p obracamy wokół A o $60°$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

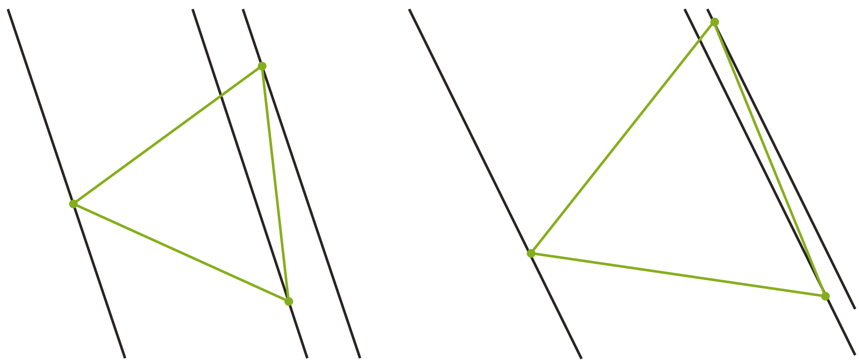
Faza 3. Konstrukcja i dowód

Rozwiązanie konstrukcyjne można przeprowadzić zarówno na tablicy, jak i w programie DGS. Po przeprowadzeniu eksperymentów wiadomo już, co należy zrobić. Oto kolejne kroki postępowania.

- Na prostej *s* wybrać punkt *A*, a na prostej *p* – punkt *B* i skonstruować trójkąt równoboczny o boku *AB*. Jego trzeci wierzchołek to punkt *C*.
- Zmienić położenie punktu *A* na prostej *s* (to nowe położenie nazywamy *A*', punkt *B* pozostaje bez zmian). Skonstruować trójkąt równoboczny o boku *A*'*B*. Jego trzeci wierzchołek to punkt C'.
- Narysować prostą *CC*'.
- W przecięciu prostych *CC*' oraz *t* powstał wierzchołek <u>*C*</u> poszukiwanego trójkąta równobocznego. Drugi wierzchołek <u>*B*</u> to nieruchomy punkt *B*. Skonstruować trzeci wierzchołek <u>*A*</u> (leżący na prostej *s*).
- Uzasadnić poprawność konstrukcji.
- Przedyskutować liczbę możliwych rozwiązań.

Faza 4. Makrokonstrukcja

Zaczynamy od ustalenia, jakie będą obiekty początkowe i końcowe tworzonej makrokonstrukcji. Dla trzech prostych równoległych w dowolnym położeniu będzie ona dawała trójkąt równoboczny o wierzchołkach leżących na tych prostych. Rysunek 8 przedstawia wynik działania makrokonstrukcji dla różnych położeń prostych.

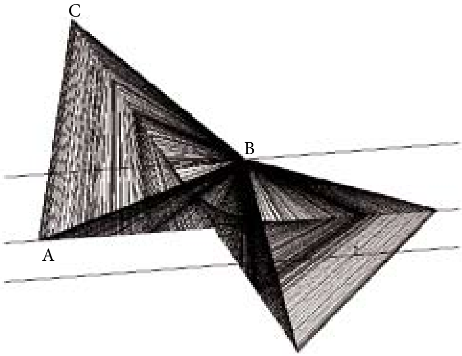


a) b) Rys. 8

Faza 5. Dalsze eksploracje

Oto kilka dalszych problemów, jakie można badać, przedłużając rozwiązane właśnie zadanie:

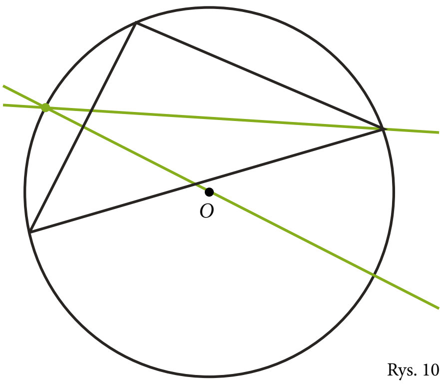
- zależność długości boku finalnego trójkąta od odległości między prostymi równoległymi; jeśli *a* i *b* są odległościami środkowej prostej odpowiednio od prostej nad nią i pod nią, to długość boku trójkąta wynosi $\sqrt{\frac{1}{3}(2a+b)^2+b^2}$,
- konstrukcja trójkąta prostokątnego równoramiennego o wierzchołkach leżących na danych prostych równoległych, stworzenie makrokonstrukcji, która automatycznie generuje taki trójkąt,
- opis figury otrzymanej przez poruszanie punktem <u>*A*</u> otrzymanym z makrokonstrukcji trójkąta <u>*ABC*</u> (opcja Ślad włączony/wyłączony) i uzasadnienie, że jest to miejsce geometryczne poruszających się trójkątów (ta figura to suma mnogościowa dwóch kątów – rys. 9).



Rys. 9

Twierdzenia odkryte przez uczniów

Niniejszy przykład pochodzi od Bronisława Pabicha – nauczyciela matematyki w Liceum Ekonomicznym w Wieliczce, któremu dziękuję za wyrażenie zgody na zmieszczenie tego zadania w niniejszym Poradniku. Oryginalnie został on obszernie opisany w jego artykule „Odkrywanie geometrii trójkąta" (NiM, 6/1993, s. 20).



Rys. 10

Uczniowie badali, jak się zmienia położenie punktów przecięcia symetralnych boków, dwusiecznych kątów, wysokości i środkowych trójkąta przy zmianie jego kształtu. Jeden z uczniów zwrócił uwagę na punkt przecięcia dwusiecznej kąta z symetralną przeciwległego boku. Po przeprowadzeniu dokładniejszych obserwacji uczniowie odkryli następującą własność: symetralna boku trójkąta przecina się z dwusieczną przeciwległego kąta w punkcie leżącym na okręgu opisanym na tym trójkącie.

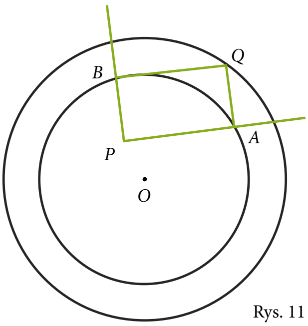
Dalsza praca polegała oczywiście na znalezieniu dowodu tej własności (który jest bardzo prosty, kiedy już wiadomo, czego chcemy dowieść), ale i na kontynuowaniu obserwacji i stawianiu nowych hipotez. Doprowadziło to do kolejnego odkrycia: trójkąt, którego wierzchołkami są punkty przecięcia symetralnych boków i dwusiecznych przeciwległych kątów (nazwijmy go trójkątem nadpisanym), ma wysokości zawarte w dwusiecznych kątów wyjściowego trójkąta, a spodki tych wysokości stanowią wierzchołki trzeciego trójkąta, który jest obrazem trójkąta nadpisanego w jednokładności o środku w punkcie przecięcia dwusiecznych jego kątów i skali 1/2.

Podane tu fakty nie występują w takim sformułowaniu (tzn. w wersji „odkryj twierdzenie", a nie „udowodnij je") w zadaniach i twierdzeniach szkolnych dotyczących geometrii trójkąta. Ich odkrycie przez uczniów bez pomocy DGS nie byłoby praktycznie możliwe. Widać więc, że jest to doskonałe narzędzie badawcze, przydające się podczas pisania prac uczniowskich z matematyki, a w konsekwencji przydatne do tego, aby oprócz kształcenia sprawnych matematycznych rzemieślników kształcić także przyszłych matematycznych twórców.

Pomysły dalszych zadań

Oto przykłady innych zadań z geometrii szkolnej, które można badać za pomocą DGS. Treść każdego z nich opatrzono ilustracją i krótkim komentarzem.

Zadanie 1. Dane jest koło i punkt *P* w jego wnętrzu. Dwie prostopadłe półproste o początku w punkcie *P* przecinają brzeg koła w punktach *A*, *B*. Tworzymy prostokąt o bokach *PA* i *PB*. Jego wierzchołek leżący po przekątnej naprzeciw punktu *P* nazywamy *Q*. Znaleźć miejsce geometryczne punktów *Q* przy ustalonym *P* i zmieniającym się położeniu półprostych.



Rys. 11

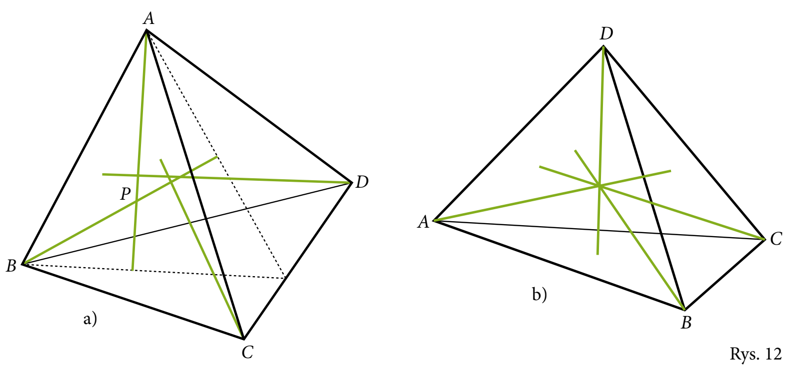
Zadanie to pochodzi ze znakomitej książki Arthura Engela „Problem-Solving Strategies" (Springer, 1998). Poszukiwane miejsce geometryczne to okrąg (rys. 11). Możliwe jest uogólnienie tego problemu na przypadek trójwymiarowy (patrz niżej).

Zadanie 2. Dana jest kula i punkt *P* w jej wnętrzu. Trzy wzajemnie prostopadłe półproste o początku w punkcie *P* przecinają powierzchnię kuli w punktach *A*, *B* i *C*. Tworzymy prostopadłościan o krawędziach *PA*, *PB* i *PC*. Jego wierzchołek leżący po przekątnej naprzeciw punktu *P* nazywamy *Q*. Znaleźć miejsce geometryczne punktów *Q* przy ustalonym *P* i zmieniającym się położeniu półprostych.

To zadanie pochodzi z Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej w 1978 roku. Poszukiwane miejsce geometryczne to sfera. Można uogólnić na przypadek przestrzenny rozwiązanie poprzedniego zadania.

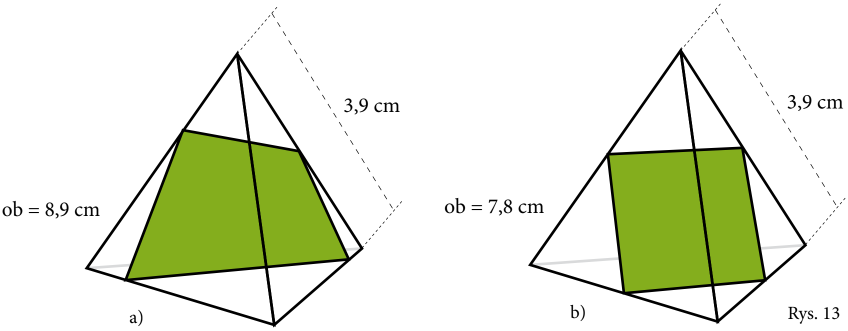
Zadanie 3. W trójkącie wysokości lub ich przedłużenia przecinają się w jednym punkcie. Czy analogiczną własność mają czworościany? Jeśli tak, uzasadnij, dlaczego. Jeśli nie, znajdź warunek konieczny i dostateczny, aby wysokości czworościanu lub ich przedłużenia przecinały się w jednym punkcie.

Czworościany nie mają opisanej w zadaniu własności (rys. 12a). Rozwiązanie zadania prowadzi do odkrycia klasy tzw. czworościanów ortocentrycznych, w których podany warunek zachodzi (rys. 12b). W takich czworościanach przeciwległe krawędzie są prostopadłe.



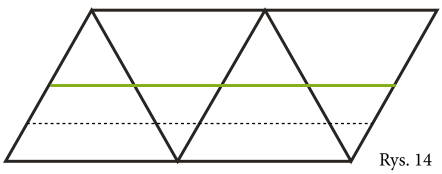
Rys. 12

Zadanie 4. Czworościan foremny przecięto płaszczyzną tak, że w przekroju otrzymano czworokąt. Jaki najmniejszy możliwy obwód może mieć ten czworokąt?

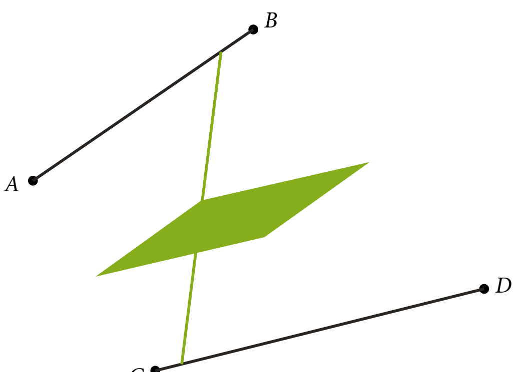


Rys. 13

Rysunek 13 przedstawia efekty prób wykonanych w Cabri 3D. Okazuje się, że najmniejszy obwód otrzymamy, gdy przekrój będzie kwadratem. Jego obwód jest podwojeniem długości krawędzi czworościanu. Ale czy kwadrat to jedyne rozwiązanie? Okazuje się, że nie. Przekrojem o takim samym obwodzie może być także prostokąt nie będący kwadratem. Aby się o tym przekonać, warto narysować siatkę czworościanu i zaznaczyć na niej linie cięcia każdej ściany (rys. 14).



Rys. 14

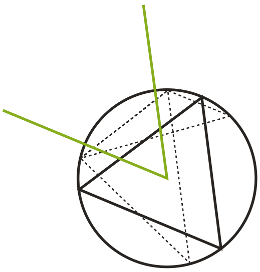


Rys. 15

Zadanie 5. Na płaszczyźnie dane są odcinki *AB* i *CD*. Tworzymy wszystkie odcinki, których jeden koniec leży na *AB*, a drugi – na *CD*. Jaki zbiór tworzą środki tak utworzonych odcinków?

Warto na początek zapytać uczniów o ich intuicje – jaki będzie przewidywany kształt poszukiwanego zbioru. Większość moich uczniów obstawiała obiekty jednowymiarowe (odcinek, ósemkę, dwa odcinki), podczas gdy jest to równoległobok. Wizualizacja problemu za pomocą DGS (patrz rys. 15 – widoczny jest ślad środka odcinka, którego końce poruszają się wzdłuż odcinków *AB* i *CD*) bardzo pomaga w „zobaczeniu" rozwiązania i jego formalnym uzasadnieniu. Uczniowie mogą wyznaczyć finalny równoległobok konstrukcyjnie. Problem można łatwo zmieniać i uogólniać. Zamiast pary odcinków można wziąć parę brzegów trójkątów, parę okręgów itp. Można też rozwiązywać zadanie w przestrzeni, umieszczając odcinki na prostych skośnych.

Zadanie 6. Trójkąt równoboczny wpisano w okrąg. Tworzymy zbiór wszystkich trójkątów wpisanych w ten okrąg, których dokładnie dwa boki są równoległe do boków danego trójkąta równobocznego. Jaki zbiór tworzą ortocentra tych trójkątów? Ortocentrum to punkt przecięcia wysokości trójkąta lub ich przedłużeń.

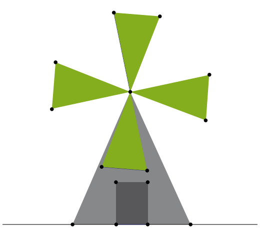

Rys. 16

Zadanie jest dość złożone i trudno wpaść na jakiś pomysł bez skorzystania z DGS. Na rysunku 16 widać fragment poszukiwanego rozwiązania. Jaki jest ostateczny wynik? To figura złożona z trzech odcinków przecinających się w środku okręgu.

Wiele innych przykładów zadań rozwiązywanych za pomocą DGS można też znaleźć na Wrocławskim Portalu Matematycznym (www.matematyka.wroc.pl, zakładki: Mat-świat lub Kącik naukowy > Kółko matematyczne).

DGS w szkole podstawowej

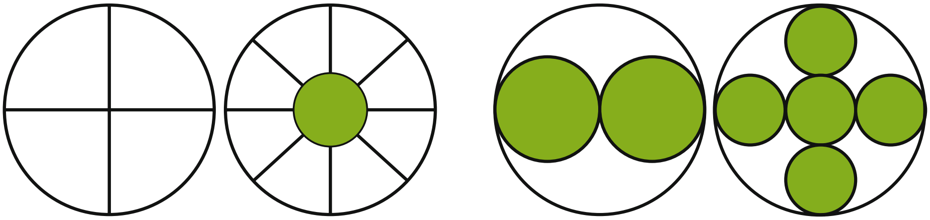
Powstaje pytanie, czy użycie DGS ma rację bytu w szkole podstawowej, gdzie zakres materiału z geometrii jest nadzwyczaj skromny. Z całą pewnością można to robić na zajęciach z uczniami zdolnymi. Mogą odkrywać rozmaite twierdzenia związane na przykład z punktami charakterystycznymi trójkąta (środek okręgu wpisanego, środek okręgu opisanego, ich położenie w zależności od rodzaju trójkąta, istnienie ortocentrum, położenie środka ciężkości), a także twierdzenia Pitagorasa i Picka.


Rys. 17

Pracując z niewyselekcjonowaną grupą uczniów, warto położyć nacisk na zabawy geometryczne rozwijające wyobraźnię i myślenie algorytmiczne. Jednym z takich zadań jest projekt wiatraczka (rys. 17), który po zaznaczeniu punktu do animacji będzie się obracał. Już skonstruowanie czterech symetrycznie położonych skrzydeł wymaga dobrej znajomości geometrii, a zamiast czterech można ich zrobić na przykład sześć lub osiem. Istotne jest zrozumienie, że do poruszania całego wiatraczka wystarczy animować tylko jeden punkt – jeden z wierzchołków podstawy jednego ze skrzydeł.

Innym przykładem pożytecznego używania DGS w szkole podstawowej (na przykład przy okazji nauki o ułamkach) jest zadanie podzielenia koła na a) cztery, b) dziewięć części o równych polach w sposób pokazany na rysunku 18. Ważne jest, aby nauczyciel wyjaśnił, że konstrukcja powinna być dokładna, nie „na oko" (powinna wykorzystywać narzędzia dostępne w programie). To może być sporym wyzwaniem dla zdolnych uczniów, bowiem potrzebna jest tu umiejętność podziału odcinka na 2 lub 3 równe części, co może być pretekstem do odkrywania (z użyciem DGS) twierdzenia Talesa. Fakt, że uzyskane z podziału części mają jednakowe pola, jest ciekawy, bo części te nie są wielokątami i na dodatek mogą nie być przystające (co w zadaniach dla SP jest pewną nowością). Uzasadnienie tego faktu nie jest oczywiste i może być pretekstem do odkrywania (znowu z użyciem DGS) proporcji pól figur podobnych.

Przedłużając wyjściowe zadanie, uczniowie mogą badać podział koła na inne liczby części o równych polach z użyciem odcinków i mniejszych kół.

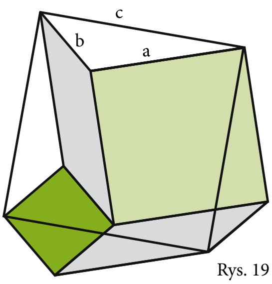


a) b) Rys. 18

Walory dydaktyczne nauczania geometrii wspomaganego przez DGS

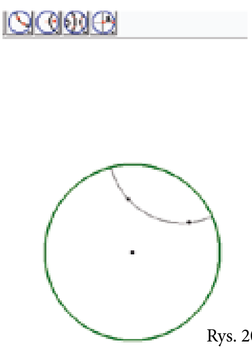
Wykorzystanie DGS w nauczaniu daje unikatowe możliwości, między innymi:

- szybkiego wielokrotnego wykonania tych samych konstrukcji, na przykład w zadaniach typu „dany jest dowolny trójkąt…" i sprawdzenia, czy i kiedy zachodzi opisana w zadaniu własność,
- „zobaczenia" rozwiązania, szczególnie w zadaniach typu „znajdź miejsce geometryczne" (wykorzystując opcję *ślad punktu*),
- przedłużania zadań, na przykład sprawdzając, czy założenia twierdzenia można osłabić, czy podobne własności mają inne obiekty, czy zachodzi uogólnienie trójwymiarowe zadania płaskiego itp.,



Rys. 19

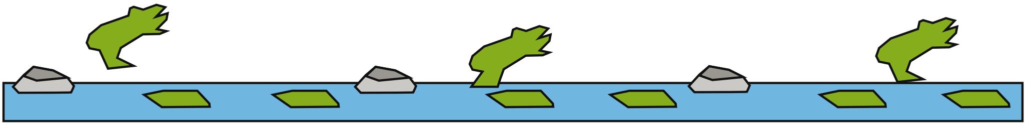
- wizualizacji twierdzeń i animowania ich dowodów (rys. 19 przedstawia ilustrację do twierdzenia kosinusów: rozpatrujemy trójkąt rozwartokątny o bokach *a*, *b*, *c*; w kwadracie o boku *c* można zmieścić zacieniowane kwadraty oraz dwa równoległoboki, co można odczytać z rysunku; uczniowie mogą stworzyć podobną wizualizację dla trójkąta prostokątnego i ostrokątnego),
- odkrywania nowych twierdzeń,
- weryfikacji poprawności konstrukcji geometrycznych (jest to najtrudniejszy etap rozwiązywania zadań konstrukcyjnych zarówno tych typowych – szkolnych, jak i konkursowych, a konsekwencją tego jest niemal całkowite zniknięcie takich zadań z konkursów i egzaminów; DGS może być dla nich szansą powrotu do szkoły),



Rys. 20

- wyjścia poza ramy programu, na przykład w świat geometrii nieeuklidesowych, w ujęciu poglądowym, bez zbędnego nakładu teorii (w czasie moich zajęć uczniowie budowali model Poincarégo geometrii hiperbolicznej obrazowany przez koło bez brzegu – na rys. 20 przedstawiono fragment menu z komendą do rysowania prostych w tej geometrii; proste to łuki okręgów prostopadłych do brzegu przestrzeni),

- symulacji sytuacji fizycznych, na przykład różnych rodzajów ruchu lub toczenia się koła po różnych krzywych, symulacji ruchów w grach strategicznych (rys. 21) lub symulacji działania rozmaitych przyrządów (np. pantografu – przyrządu do kreślenia w skali lub inwersorów – przyrządów zamieniających ruch po okręgu na ruch po prostej albo na odwrót – podczas moich zajęć uczniowie tworzyli modele prostowodu Watta i inwersora Peaucelliera-Lipkina).



Rys. 21. Ilustracja symulacji ruchów żaby w zadaniu dotyczącym rekurencji. Symulacje tworzone za pomocą DGS są związane z pewnymi przekształceniami geometrycznymi. Ich uruchomienie, czyli zmiana obiektu początkowego (odgrywającego rolę zmiennej niezależnej), powoduje zmiany innych obiektów (zmiennych zależnych).

Zamiast zakończenia

Z moich obserwacji wynika, że na dodatkowych zajęciach dla uczniów zdolnych – na przykład na kółkach olimpijskich – bardzo rzadko używa się DSG. Jednak gorąco zachęcam nauczycieli do wprowadzania takich zajęć i do przyzwyczajania uczniów do eksperymentów geometrycznych. Ma to ogromne znaczenie w przypadku uczniów startujących w konkursach prac badawczych, bowiem pozwala nie tylko odkryć wiele zupełnie nowych, nietrywialnych twierdzeń, ale i dodać głębszej perspektywy twierdzeniom z pozoru dobrze znanym.

Zalety DGS warto wykorzystać nie tylko w pracy z uczniami startującymi w różnego typu konkursach. Uzdolnione mogą być także osoby pozbawione żyłki rywalizacji i nieodnajdujące się w „pracy na czas". Można wyodrębnić kilka typów takich uczniów: uczniowie-badacze, uczniowie-konstruktorzy, uczniowie mający dużą łatwość algorytmizowania problemów i pisania programów komputerowych. DGS odgrywa szczególne znaczenie w pracy z uczniami-badaczami. Wystarczy im tylko pokazać, jak działa ta swoista maszynka do szukania własności i odkrywania twierdzeń, a z pewnością zrobią z niej dobry użytek.

Zakładamy ponadto, że wielu uczniów uzdolnionych matematycznie podejmie w przyszłości pracę badawczą. Ich zadaniem będzie wtedy nie tylko dowodzenie gotowych, postawionych już hipotez, ale także odkrywanie tych hipotez. Umiejętność ta nie jest bezpośrednio wykorzystywana w nauczaniu szkolnym ani w konkursach matematycznych i olimpiadach, ale jest kluczowa w pracy badawczej. W tym celu warto oprócz kształcenia w zakresie sprawnego przeprowadzania dowodów uczyć odkrywania hipotez, które później procesowi dowodzenia poddamy. Taką rolę mają pełnić omawiane w tym rozdziale przykłady.

Wiele pomysłów i inspiracji dla uczniów-konstruktorów można znaleźć na przykład na stronach: www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue, www.steiner.math.nthu.edu.tw/disk3/cabrijava/ lub www.dino-optic.fr.

Literatura

Książki

- Schumann H., Green D., *Discovering Geometry with a Computer – using Cabri Géomètre*, Chartwell-Bratt, 1994.
- Serra M., *Discovering Geometry. An Investigative Approach*, Key Curriculum Press, 2003.
- Pabich B., *Pierwsze kroki i lekcje matematyki z CABRI II Plus*, MATH-COMP-EDUC, 2008.
- Pabich B., *Odkrywanie geometrii trójkąta,* MATH-COMP-EDUC, 2001.
- Pabich B., *Pierwsze kroki z CABRI 3D,* MATH-COMP-EDUC, 2001.

Artykuły

- Straesser R., CABRI-GÉOMÈTRE: *Does dynamic geometry software (DGS) change geometry and its teaching and learning?*„International Journal of Computers for Mathematical Learning" 2001, nr 6, s. 319–333.
- Zarzycki P., *O nowym typie zadań matematycznych*, „Matematyka i Komputery" 2004, nr 18, s. 4–7.

Strony internetowe

- www.cabri.com
- www.cinderella.de
- www.dynamicgeometry.com
- www.geogebra.org
- www.javaview.de/maple
- www.rene-grothmann.de/car.html
- www.zirkel.sourceforge.net
- www.mathbits.com/mathbits/gsp
- www.pabich.interklasa.pl
- http://www.matematyka.wroc.pl/mat-swiat
- http://www.matematyka.wroc.pl/kacik-naukowy/kolko-matematyczne

CZĘŚĆ III

Jak uczyć, aby rozwijać zainteresowania ścisłe ucznia (czyli matematyka dla wielu)

1. Koło matematyczne – Kinga Gałązka
2. Koma – łowimy talenty – Małgorzata Mikołajczyk
3. Liga zadaniowa – Michał Śliwiński
4. Mecz matematyczny – Małgorzata Mikołajczyk
5. Konkursy matematyczne – Kinga Gałązka
6. Obóz matematyczny – Małgorzata Mikołajczyk
7. Uczeń zdolny pod katedrą – Jacek Dymel
8. Matematyczne wycieczki – Małgorzata Mikołajczyk

1. Koło matematyczne

Kinga Gałązka, Łódź

W tym rozdziale odpowiemy na następujące pytania: Jak zaplanować pracę koła matematycznego, aby odniosło ono sukces, a nie okazało się pomysłem chybionym, marnowaniem intelektualnego potencjału, zapału i nakładu pracy nauczyciela. Jakie czynniki uwzględnić przy definiowaniu profilu zajęć? Jak projektować zadania na kółko, aby nie powielały utartego schematu podręcznikowo-lekcyjnego i nie stały się dodatkowymi godzinami przedegzaminacyjnego treningu? Jak projektować zadania, które nie są odtwórcze, zalgorytmizowane, wymagają otwartego myślenia i planowania procesu rozwiązania oraz zawierają elementy modelowania matematycznego?

Zanim zabrzmi pierwszy dzwonek, czyli planowanie pracy

Podczas spotkań z nauczycielami i rozmów z uczniami coraz częściej pada pytanie, czy potrzebne są dziś koła matematyczne. Zazwyczaj są one kojarzone z akademicką formą zajęć, na które uczęszcza kilku zapaleńców z hermetycznego kręgu tak zwanych szkolnych geniuszy. Jeśli ktoś znajdzie się na takim spotkaniu przypadkiem, nie ma szans, aby cokolwiek zrozumieć, a tym bardziej dostrzec celowość zgłębiania tak abstrakcyjnej i nieprzydatnej z pozoru wiedzy. Taką „sztukę dla sztuki" uprawiają więc najczęściej tylko ci, którzy chcą przedostać się na kolejne szczeble konkursowych czy olimpijskich zmagań.

Z doświadczenia wiem, że aby zapewnić godziwą frekwencję na zajęciach kół matematycznych, nauczyciele pod płaszczykiem rozwijania zdolności uczniów prowadzą ukryte kursy przygotowujące do sprawdzianów i egzaminów zewnętrznych, a ci uczniowie, których rzeczywiście interesują matematyczne ciekawostki, zastosowania i proste rozwiązania trudnych zadań, szukają pomocy na stronach internetowych lub w kołach międzyszkolnych, a nie w szkole. Co zatem zrobić, aby zajęcia koła matematycznego nie powielały modelu klasowo-lekcyjnego i były rzeczywistym stymulatorem zdolności twórczych młodzieży?

Na początku należy zdać sobie sprawę z tego, że nie jest możliwe stworzenie uniwersalnego modelu zajęć, które satysfakcjonowałyby wszystkich uczniów zainteresowanych matematyką. Trzeba więc zawęzić krąg odbiorców. Ale jak dokonać wyboru?

Warto rozpocząć od przeanalizowania swoich własnych zainteresowań i umiejętności. Jeśli nauczyciel przekazuje uczniom to, co jest jego rzeczywistą pasją, wzbudza w nich większe zainteresowanie, niż podając wiadomości z obszarów, które są mu obojętne, lub w których sam porusza się niechętnie. Zatem jeżeli zadania olimpijskie lub geometryczne budzą w nim strach, nie powinien porywać się na prowadzenie koła dla olimpijczyków; jeśli nie lubi matematycznych łamigłówek i nieszablonowych rozumowań, niech zrezygnuje z zajęć dla mistrzów w grach logicznych; jeśli nie ma daru pasjonującego opowiadania, niech zapomni o kole historii matematyki; a jeśli nie ma smykałki technicznej czy komputerowej i nie przepada za statystyką, raczej nie dla niego jest koło miłośników zastosowań matematyki; z kolei bez cierpliwości i umiejętności manualnych nie da rady prowadzić koła matematycznego origami. Nauczyciele bywają różni i nie muszą lubić ani umieć w matematyce wszystkiego. Bez kompleksów można pozostawić pewne tematy bardziej doświadczonym i zainteresowanym nimi kolegom.

Przy planowaniu pracy koła matematycznego ważny jest też, rzecz jasna, krąg odbiorców i motywacje, jakie nimi kierują. Mogą to być uczniowie przygotowujący się do konkursów, zainteresowani związkami matematyki ze sztuką, modelarze, origamiści, komputerowcy, łamigłówkowicze, miłośnicy gier planszowych, uczniowie klas I chcący wyrównać swoje szanse i uzupełnić luki w wiadomościach na starcie w liceum, maturzyści chcący się przygotować do poznawania matematyki na poziomie akademickim itp. Ważne jest, aby dla wybranej grupy uczniów tematyka kółka była na tyle konkurencyjna, że zachęci ich do pozostania dłużej w szkole i wygra z serialami telewizyjnymi czy portalami społecznościowymi.

Na początku trzeba się jednak zastanowić, czy w szkole, świetlicy środowiskowej, domu kultury itp. znajdą się w ogóle kandydaci do uczęszczania na zajęcia koła o wybranym przez nas profilu i na jakie przeszkody możemy natrafić. Propozycja elitarnego koła olimpijskiego może spalić na panewce, gdy uczniowie wybiorą renomowane zajęcia międzyszkolne prowadzone na pobliskiej wyższej uczelni, a popularnonaukowe zajęcia z astronomii obserwacyjnej – gdy uczestnikom nie wystarczy zapału do nocnych wypadów w plener z teleskopem lub wyjazdów do obserwatorium.

Jeśli uczniowie będą postrzegali zajęcia kółka jako interesujące, będą się one cieszyły renomą, a nawet może się wykształcić w szkole pewnego rodzaju snobizm na przynależność do grona stałych bywalców tych zajęć. W kolejnych latach nie powinno być trudno o chętnych, ale gdy dopiero rozpoczynamy prowadzenie dodatkowych zajęć, pamiętajmy, że konkurencja jest duża. Szczególnie w większych miastach uczniowie są zasypywani ofertami płatnych i bezpłatnych zajęć pozalekcyjnych, sekcji zainteresowań i konkursów matematycznych. A i nasi koledzy w szkole nie próżnują, starając się pozyskać szczególnie tych zdolniejszych uczniów do współpracy – uczniowie ci mają bowiem często wszechstronne zainteresowania i odnoszą sukcesy na wielu polach (także sportowych i artystycznych). W przypadku gdy nie potrafimy zdecydować, jaką propozycję przedstawić uczniom, możemy przeprowadzić swoiste badania opinii w postaci wywiadów z uczniami i ich rodzicami, ankiet i sondaży. Wyniki mogą się okazać tyleż zaskakujące, co inspirujące.

Opiekun kółka powinien też jasno określić produkt, który chce otrzymać po skończonym cyklu zajęć, a uczestnicy powinni mieć świadomość istnienia i konsekwentnego realizowania wcześniej przyjętych założeń: czy ma to być przyrost umiejętności w rozwiązywaniu zadań metodami elementarnej geometrii, rozwój wyobraźni przestrzennej, czy nabycie doświadczenia w wykorzystaniu metod numerycznych lub graficznych do rozwiązywania zadań szkolnych, a może przygotowanie szkolnej wystawy modeli brył lub parkietaży. Ważne jest także sprecyzowanie wymagań dotyczących uczestników, na przykład dobra znajomość tabliczki mnożenia, znajomość podstaw obsługi arkusza kalkulacyjnego.

Kolejny element planowania pracy kółka to odpowiedź na pytanie, czy zajęcia będą powiązane ze sobą w ustalonym porządku (czyli czy uczeń, aby uczestniczyć w danym spotkaniu, musi posiadać wiedzę i umiejętności nabyte wcześniej), czy będą stanowić kilka zamkniętych cykli o zmieniającej się co kilka tygodni tematyce, czy też poszczególne tematy będą niezależne, a uczniowie będą mogli dowolnie wybierać interesujące ich zagadnienia. Ustalamy w ten sposób, czy kółko będzie „zamknięte" i w jego zajęciach będą mogli brać udział tylko uczniowie wcześniej zapisani, czy też „otwarte" dla wszystkich, ze zmiennym (co kilka tygodni lub z jednych zajęć na drugie) składem uczestników.

Gdy już przeanalizujemy wszystkie wymienione wyżej aspekty: określimy adresata i cel kółka, jego tematykę i sposób organizacji zajęć, warto pomyśleć o potencjalnych partnerach i sponsorach. Można włączyć do pracy absolwentów szkoły, którzy dziś są uczniami szkół wyższych szczebli, lub rodziców, poszukać sprzymierzeńców wśród lokalnych władz, organizacji samorządowych i zakładów pracy. Wyjście poza mury szkolnej rzeczywistości, wymiana doświadczeń i pomysłów z osobami „z zewnątrz", czy możliwość dysponowania nawet niewielkimi funduszami na pewno nie zaszkodzą planowanym działaniom, a mogą pomóc w ich uatrakcyjnieniu i wzbogaceniu.

Kiedy mamy już wizję naszego koła matematycznego, zastanówmy się nad potencjalnymi trudnościami, jakie możemy napotkać. Nie po to, żeby zrazić się do początkowego pomysłu, ale by móc się na nie zawczasu przygotować i przemyśleć sposoby radzenia sobie z nimi. Mogą to być: trudność dostosowania godzin zajęć do możliwości czasowych i percepcyjnych uczniów, mało konkurencyjna tematyka zajęć wobec bogactwa innych propozycji, brak wsparcia finansowego na zakup potrzebnych materiałów, zmienna lub słaba frekwencja. Trudności są po to, aby je pokonywać. Jeśli nasze zajęcia będą starannie przemyślane i dobrze zaplanowane, łatwiej będzie je z sukcesem realizować.

Lista spraw do załatwienia

Większość nauczycieli pracuje minimum 18 godzin w tygodniu, ale myślą o swojej pracy znacznie dłużej, więc aby wyeliminować kilka godzin nadprogramowego martwienia się tym, czy o niczym ważnym nie zapomnieliśmy, warto przygotować wcześniej popularną już także u nas „czek listę" (ang. *check list*), która pomoże sprawnie zorganizować zajęcia. Powinny się na niej znaleźć następujące punkty:

- **Zaplanowanie i ogłoszenie tematów zajęć.** Tematyka koła powinna być dostosowana do potrzeb uczniów. Jeśli są nimi na przykład olimpijczycy, nie powinno budzić wątpliwości, czym będą się na danych zajęciach zajmować (choć odrobina humoru jest całkiem na miejscu, np. *Iniekcja, która nie jest zastrzykiem, czyli funkcja różnowartościowa*). Jeśli celem koła jest edukacja matematyczna dla przyjemności, powinniśmy się pokusić o sformułowanie tematów zagadkowych, intrygujących, pobudzających wyobraźnię (np. *Który tak naprawdę mamy teraz rok?* – to zagadnienia związane z historią kalendarza, *Czy szybkonogi Achilles dogoni żółwia?* – to zajęcia o paradoksach nieskończoności, *Jak wygrać milion dolarów w sapera?* – o hipotezie NP=P). Dobre wzorce w tym zakresie można czerpać z literatury popularnonaukowej. Atrakcyjny, działający na wyobraźnię temat z pewnością przyciągnie spragnionych sensacji, znużonych szkolną rutyną uczniów.
- **Wybór metod i form pracy.** Aby pobudzać twórczą aktywność uczniów, nie możemy poprzestać na prowadzeniu zajęć metodą „kreda i tablica". Szybko znudzą się one i uczniom, i samemu prowadzącemu. Pamiętajmy, że uczniowie w różny sposób gromadzą i zapamiętują informacje, preferują różne style uczenia i posiadają jako dominujące różne rodzaje inteligencji. Techniki przekazywania i osiągania wiedzy trzeba więc urozmaicać i maksymalnie dostosować do potrzeb uczniów. Zadbajmy o to, by podczas zajęć uczeń nigdy nie był bierny, by miał okazję do zadawania pytań, eksperymentowania, błądzenia, dyskutowania oraz spierania się z nauczycielem i kolegami, a także wybiegania na boczne, odchodzące od głównego tematu tory, które tylko jego interesują. Warto zawczasu pomyśleć o zgromadzeniu i wykorzystaniu gier dydaktycznych, programów komputerowych, filmów oraz interaktywnych prezentacji z wykorzystaniem smartboarda. W zależności od tematyki przydatną może się okazać też metoda projektów czy webquestu, a także wycieczki matematycznej. Uczniowie z natury są pomysłowi i chętni do działania, łatwo ich zachęcić do wspólnej pracy nad interesującym tematem, a dodatkowy doping stanowi możliwość pokazania jej efektów szerszemu gronu. Ci wybitnie uzdolnieni mogą przygotować własną konkursową pracę badawczą lub poprowadzić zajęcia seminaryjne dla kolegów, innych zmotywuje przygotowanie wystawy ich prac,

artykuł w internecie czy prezentacja na forum klasy, dyrekcji i rodziców. To dobra okazja po podsumowania całorocznej pracy kółka i jego promocji.

- **Ewaluacja zajęć.** Jak przekonać się, czy nasze propozycje dla uczniów są wartościowe i przydatne? Najlepszą oceną wystawioną przez uczestników jest frekwencja na zajęciach, choć nie zawsze jest to dobry wskaźnik jakości. O stopniu realizacji celów może świadczyć osiągnięty sukces ilościowy, tylko co powinno być jego miarą? Czy jeśli spośród uczestników kółka dwie osoby (tylko?, aż?) zakwalifikują się do etapu regionalnego konkursu czy olimpiady, to jest to sukces czy porażka? To oczywiście rzecz względna, ale na pewno porażką będzie, gdy pozostali uczniowie, zniechęceni brakiem osobistego sukcesu, przestaną na kółko przychodzić, nie widząc sensu dalszej pracy. Porażka polega wtedy przede wszystkim na wyrobieniu u uczniów niewłaściwej motywacji. Ważniejszy bowiem od formalnych tytułów i wyróżnień jest rozwój umiejętności atakowania i rozwiązywania nowych problemów, a także sama chęć podejmowania takich wyzwań i przekonanie, że jest to przydatne w dalszym życiu i dalszej nauce. Jeśli koło ma inny profil niż olimpijski, przyjrzyjmy się, na ile rozbudziliśmy u jego uczestników zainteresowanie i entuzjazm dla matematyki, na ile wyrobiliśmy pożądane nawyki zdobywania, porządkowania i prezentowania wiedzy i na ile zachęciliśmy uczniów do samokształcenia.
- **Działania marketingowe.** W czasach gospodarki wolnorynkowej także szkoły i nauczyciele muszą aktywnie walczyć o ucznia, zachęcić go, pokazać wymierne korzyści z aktywnego uczestnictwa w procesie nauczania. Warto więc zadbać o właściwą reklamę oferowanego produktu, na przykład zapraszając uczniów we wrześniu na pierwsze zajęcia kółka, w czasie których pokażemy próbki tego, czym i jak będziemy się zajmować przez cały rok. Informację o proponowanych zajęciach wraz z krótką prezentacją zachęcającą do udziału w nich można zamieścić na szkolnej stronie internetowej, rozesłać uczniom pocztą elektroniczną, a specjalne ulotki rozdać na pierwszym spotkaniu z rodzicami. Także w czasie trwania roku szkolnego warto przypominać szkolnej społeczności o działalności koła, prezentując jego sukcesy czy ciekawe wypracowane materiały.
- **Spotkania z partnerami i sponsorami.** Szkoła nie funkcjonuje w społecznej próżni, a matematyka nie jest nauką czysto teoretyczną. Wiele nowych idei zaszczepili matematyce niematematycy: fizycy, astronomowie, podróżnicy, kartografowie, ekonomiści. Możliwość szerokiej wymiany doświadczeń i czerpania z przemyśleń innych otwiera nowe horyzonty myślowe i sprzyja uczeniu się. Także personalny kontakt z osobami spoza własnego środowiska szkolnego (rówieśnikami i nauczycielami z innych szkół, absolwentami, studentami, naukowcami, przedstawicielami różnych zawodów posługującymi się na co dzień matematyką) sprzyja wielotorowości uczenia się i zapamiętywania, rozwija zainteresowanie i buduje motywacje. Matematyka jest wszechobecna w dzisiejszym świecie, choć często w sposób ukryty i mało zauważalny, ale priorytetowy. Przekonajmy o tym potencjalnych sponsorów. I o tym, że warto inwestować w światłą, inteligentną, logicznie postrzegającą rzeczywistość młodzież, gdyż to ci młodzi ludzie są naszą wspólną przyszłością, a rozwijanie ich talentów będzie motorem cywilizacji XXI wieku.

Tematyka koła matematycznego, czyli byty idealne i realne

Zdarza się, że gdy przeglądamy program koła matematycznego, zauważamy, że nie ma tam nic poza hasłami wypisanymi z programu wyższego etapu edukacyjnego. I tak zamiast rozwijać sprawność analitycznego i syntetycznego myślenia, dostrzegania zależności algebraicznych i geometrycznych oraz budowania analogii, wtłacza się uczniom do głów kolejne pojęcia i algorytmy, które ułatwiają rozwiązywanie pewnych zadań, ale w sposób całkowicie bierny, niepobudzający matematycznej wyobraźni.

Niemal wszystkie zadania olimpijskie z geometrii są tak skonstruowane, że można je rozwiązać, wykorzystując wyłącznie metody elementarne. Nawet jeśli są to zadania trudne, ich rozwiązania może zrozumieć całkiem przeciętny uczeń. Trzeba jednak geniuszu, wyobraźni i doświadczenia, aby na te proste rozwiązania wpaść. I tego właśnie uczmy dzieci: oglądania problemu z rozmaitych stron, aplikowania różnych metod rozwiązania, poprawiania ich i upraszczania. Pozwólmy im na swobodne poszukiwanie właściwej drogi, rozważajmy nawet najbardziej szalone pomysły, choćby po to, żeby się przekonać, że wiodą nas na manowce. Pokażmy, że rozwiązaniem matematycznego problemu można się delektować, a nie tylko stosować mechaniczne, zalgorytmizowane sztuczki. Nie narzucajmy się ze swoją wiedzą. Dopiero gdy uczniowie określą, jakie napotykają bariery, pomóżmy im je pokonać.

Pamiętajmy, że koło to nie tradycyjna lekcja z mniejszą liczbą uczestników i trudniejszymi zadaniami. Przede wszystkim trzeba mieć na nie pomysł. Jest to stosunkowo proste, gdy odpowiadając na potrzebę chwili, organizujemy zajęcia na potrzeby uczniów startujących w olimpiadach i konkursach. Wtedy łatwo określić cele zajęć i umiejętności, które winniśmy ukształtować, oraz właściwie dobrać zadania, z którymi powinniśmy zapoznać uczniów w zależności od specyfiki zawodów (zadania olimpijskie, łamigłówki logiczne, lingwistyka matematyczna, geometria elementarna, terenowe zadania konstrukcyjne itp.). Styl pracy takiego koła może być tradycyjny, ale wzbogacony nowymi metodami i środkami dydaktycznymi, na przykład stałą możliwością korzystania z komputera i internetu lub prowadzeniem zajęć metodą e-learningu. Silnie eksponowana jest wtedy tutorska rola nauczyciela wpisująca się we wzorzec kształcenia typu mistrz i uczeń.

Znacznie trudniej jest, gdy chcemy poznawać wraz z uczniami matematykę bliższą codziennemu życiu. Trzeba uświadomić sobie, że mamy XXI wiek i najwyższy czas odłożyć do lamusa wiedzę scholastyczną, niemożliwą do wykorzystania w sytuacjach pozaszkolnych. Poszukując ciekawych tematów, warto spojrzeć na matematykę oczami ucznia i pomyśleć, co byłoby dla niego w danym momencie atrakcyjne i przydatne. Oczywiście, w wielu wypadkach trudno będzie sprostać wymogom użyteczności, gdyż współczesne technologie używają zaawansowanych metod matematycznych, niemniej pokazując najpierw współczesne zastosowania, można zaciekawić uczniów teorią, pojęciami i technikami matematycznymi, jakie się w nich kryją.

Dobrymi przykładami są tu wszelkie zagadnienia optymalizacyjne (mosty królewieckie, kolorowanie map, algorytmy dynamiczne) prowadzące do teorii grafów albo osławiony realizacją filmową „efekt motyla" (czy ruch skrzydeł motyla w Tokio może wywołać tornado w Teksasie?) będący pretekstem do badania fraktali. Wymienione tu obiekty matematyczne (grafy i figury samopodobne) są wdzięcznymi tematami zajęć koła matematycznego na każdym poziomie edukacyjnym. Są bazą szerokiej teorii z wieloma możliwymi aplikacjami, pozwalają łatwo zindywidualizować pracę nad rozmaitymi problemami, przygotować wiele ćwiczeń z zaskakującym finałem i sensownie wykorzystać multimedia. Podobnie płodnymi i atrakcyjnymi dla uczniów tematami kółek skupionych na zastosowaniach mogą być probabilistyka i statystyka albo zadania logiczne (typu „on wie, że ja wiem, że on wie" czy paradoks kłamcy).

Na szczęście książki, czasopisma i portale internetowe popularyzujące wiedzę matematyczną są niewyczerpaną kopalnią intrygujących pomysłów i dostarczają wielu gotowych rozwiązań.

Jak myśli uczeń, czyli przezwyciężanie bezwładu

Nie łudźmy się, że wszyscy uczniowie, którzy zadeklarują chęć brania udziału w zajęciach koła, będą pełni zapału do intensywnej pracy. Część z nich będzie przychodziła, by spełnić oczekiwania rodziców, inni w nadziei nadrobienia zaległości, a jeszcze inni, aby spotkać się z (interesującymi!) kolegami lub koleżankami.

Większości zabraknie też samozaparcia, wytrwałości i czasu do pogłębiania wiedzy i badania poznanych problemów w domu. Nie należy jednak zbyt łatwo z takich uczniów rezygnować.

Albert Einstein zapytany, w jaki sposób pojawiają się odkrycia, stwierdził: „Wszyscy wiedzą, że czegoś zrobić nie można. Ale przypadkowo znajduje się jakiś nieuk, który tego nie wie. I właśnie on robi odkrycie". Podobnie może się zdarzyć na naszym kole. Nawet uczeń z pozoru słaby może się okazać pomysłowy i podsuwać innym propozycje dojścia do rozwiązania nieszablonowymi sposobami. Potrzebna mu jest tylko silna motywacja do przezwyciężenia bezwładu umysłowego i wiara nauczyciela w jego potencjalne możliwości.

Za amerykańskim psychologiem Laurencem Steinbergiem można wyróżnić trzy podstawowe typy myślenia: analityczny, twórczy i praktyczny. Osoba myśląca analitycznie poddaje problem dogłębnemu badaniu, porównuje z innymi sobie znanymi, rozkłada go na mniejsze elementy, zauważa i usuwa trudności przez formułowanie prostszych wariantów. Takie myślenie sprawdza się w rozwiązywaniu trudnych, ale typowych zadań. Do rozwiązania zadania nietypowego jest jednak niewystarczające. Do procesu myślenia należy włączyć jeszcze planowanie, projektowanie i syntezowanie. Z kolei osoba myśląca twórczo dostrzega nietypowe możliwości rozwiązania problemu, nie zamyka się w obrębie danego działu, na gruncie którego postawiono problem, łamie schematy, próbuje wykorzystać metody pochodzące z innych z pozoru niezwiązanych z problemem działów matematyki, interpretuje problem w różnych dostępnych sobie językach (np. geometryzuje zagadnienia algebraiczne lub numeryzuje problemy funkcyjne), ma łatwość łączenia pomysłów z różnych dziedzin i dopasowywania ich do nowej poznawczo sytuacji. Z kolei osoba myśląca praktycznie rozważa problem z perspektywy ewentualnego zastosowania go lub dobrania gotowego narzędzia adekwatnego do zadania. Ten typ myślenia w dużej mierze opiera się na schematach i algorytmach, a preferująca go osoba często nie ma potrzeby rozumienia poprawności i celowości obranego sposobu postępowania. Po prostu wie, jak należy coś zrobić, i stosuje tę wiedzę, jeśli tylko okazuje się skuteczna.

Nauczycielowi prowadzącemu koło matematyczne łatwiej będzie dobierać odpowiednie rodzaje ćwiczeń i zadań oraz indywidualizować wymagania, gdy pozna preferowany sposób myślenia swoich uczniów. Ponadto, na przykład podczas pracy w grupach lepsze efekty zostaną osiągnięte, gdy w każdej grupie znajdą się osoby o różnych typach myślenia. Dlatego każdorazowo pracę nad nowym problemem warto rozpoczynać od startera będącego zachęcającym wstępem do tematu, potem przejść do „burzy mózgów", czyli swobodnej dyskusji prowadzącej do precyzyjnego sformułowania problemu oraz zebrania propozycji jego rozwiązania. Dalsza praca powinna się odbywać w małych zespołach, których członkowie będą się nawzajem inspirowali. W razie potrzeby część zajęć można przeznaczyć na pracę indywidualną, podczas której każdy będzie zmuszony do intelektualnego wysiłku, a nie biernego oczekiwania na efekty pracy innych, ale będzie też mógł pracować we własnym tempie, stosując przyjazne dla siebie techniki.

Rolą nauczyciela jest stworzenie optymalnego klimatu zajęć, by pobudzać elastyczność myślenia i twórczą aktywność uczniów, ale podczas zajęć koła matematycznego nie starajmy się na siłę odchodzić od znanych uczniom procedur. Raczej zachęcajmy do tworzenia nowych, na przykład krytycznego przyglądania się założeniom, szukania luk i błędów w poszczególnych krokach rozumowaniach, podważania argumentów kolegów i szukania dla nich kontrprzykładów. Pamiętajmy, że schematy i automatyzmy są także ważne, gdy bowiem sprowadzimy nowy problem do zagadnienia typowego, oszczędzą czas i wysiłek intelektualny.

Okiem Światowida, czyli jak rozwiązywać zadania

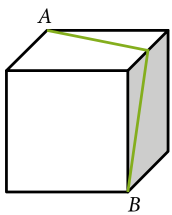
Jedną z procedur, jakie warto stosować do rozwiązywania trudniejszych zadań, w których nie narzuca się żaden naturalny sposób postępowania, jest oglądanie problemów z różnych stron (podobnie jak w różnych kierunkach spoglądały cztery twarze słowiańskiego bóstwa) i wybieranie najlepiej rokującego podejścia.

Oglądanie od przodu to rutynowe podejście do problemu: zrozumienie i wizualizacja treści zadania, wyodrębnienie danych wielkości i zależności oraz poszukiwanych niewiadomych lub faktów, które należy uzasadnić, a także opracowanie strategii rozwiązania.

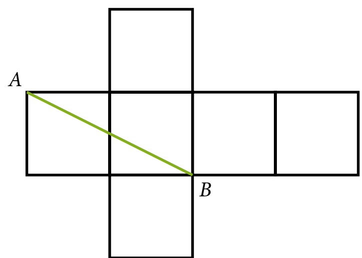
Oglądanie od tyłu polega na zaprezentowaniu uczniom gotowego wyniku zadania i na wspólnym zastanawianiu się, w jaki sposób taki wynik otrzymano. Znać odpowiedź to wszak nie to samo, co rozumieć, dlaczego taka właśnie jest. Oto przykłady.

Pająk siedzi w jednym z wierzchołków sześcianu i ma przejść do wierzchołka najdalej od niego oddalonego, pokonując najkrótszą drogę.

Odpowiedź do zadania przedstawia rysunek 1, ale nawet znając ją, trudno się zorientować, dlaczego akurat taka droga jest najkrótsza. Wystarczy jednak rozciąć sześcian i rozłożyć go w postaci siatki na płaszczyźnie (rys. 2), a wszystko staje się jasne.

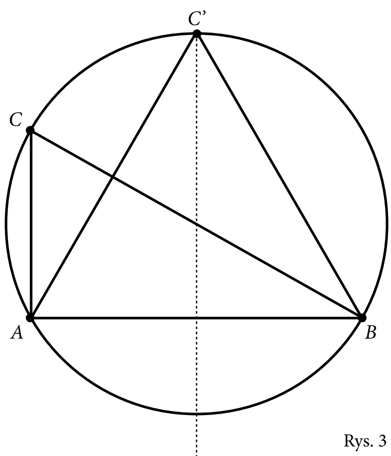


Rys. 1



Rys. 2

Dany jest okrąg o promieniu r. Który z trójkątów wpisanych w ten okrąg ma największe pole?



Rys. 3

Rozwiązaniem jest trójkąt równoboczny (czego można się było spodziewać), ale dlaczego jego pole jest największe z możliwych? Załóżmy nie wprost, że tak nie jest. Niech maksymalne pole ma trójkąt o pewnych bokach różnej długości. Wtedy przez przesuwanie wierzchołka wspólnego dla tych boków po okręgu w taki sposób, aby te długości wyrównać, zwiększa się pole trójkąta (bo przy niezmienionej podstawie zwiększa się opuszczona na nią wysokość – rys. 3), co daje sprzeczność.

Czy liczba $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$ *jest wymierna czy niewymierna?*

Ta liczba jest równa zero. Wiedząc to, nietrudno ten fakt uzasadnić. Mamy pokazać, że $2^{\log_3 5} = 5^{\log_3 2}$. Tak jest, bowiem ze wzoru na zamianę podstaw mamy: $2^{\log_3 5} = 2^{\frac{\log_2 5}{\log_2 3}} = 5^{\log_3 2}$, ckd.

Oglądanie z góry polega na spojrzeniu na zadanie jako całość, bez skupiania się na detalach. Wtedy zauważymy być może, że jest ono szczególnym elementem znacznie szerszego problemu mającego ogólne, znane rozwiązanie. Poszukujemy zatem analogii, próbujemy wpisać zadanie w szerszy kontekst, powiązać je z jakąś teorią czy ogólnym twierdzeniem. Nasze przypuszczenia nie zawsze okażą się słuszne, ale zazwyczaj będą pomocne w poszukiwaniu pomysłu rozwiązania. Oto przykłady zadań, do których warto taki ogląd zastosować.

Czy zachodzi równość $NWD(44^{44}, 55^{55})\cdot NWW(44^{44}, 55^{55}) = 44^{44}\cdot 55^{55}$*?*

Zamiast mozolnie obliczać największy wspólny dzielnik, najmniejszą wspólną wielokrotność oraz iloczyn podanych liczb, wystarczy zauważyć, że (z definicji NWD i NWW) własność podana w zadaniu jest tożsamością i zachodzi dla dowolnych liczb naturalnych.

Która z liczb jest większa: $\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{4}$ *czy* $\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{20}+2\sqrt[3]{2}$*?*

Abstrahując od konkretnych wartości, widzimy że pierwsza liczba jest postaci $a+b$, a druga a^2-ab+b^2. Oba te wyrażenia występują w jednym ze wzorów skróconego mnożenia, mianowicie $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$. Zatem iloczyn danych liczb wynosi 9 i widać, że pierwsza z nich jest większa niż 3 (bo jej składniki są większe od $\frac{3}{2} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$), wobec tego druga jest mniejsza niż 3 i w konsekwencji mniejsza od pierwszej.

Znajdź dwie liczby, których suma wynosi 20, a iloczyn jest największy z możliwych.

Z zasady izoperymetrycznej wiemy, że z prostokątów o danym obwodzie największe pole ma kwadrat. O tym właśnie jest mowa w zadaniu. Zatem szukane liczby to 10 i 10.

Oglądanie z dołu jest procesem przeciwnym do oglądania z góry. Mamy z nim do czynienia wtedy, gdy bez zagłębiania się w treść zadania koncentrujemy się na jednym szczególe. Oto przykłady.

Czy można znaleźć na płaszczyźnie 100 punktów o tej własności, że każde trzy z nich są wierzchołkami trójkąta rozwartokątnego?

Bez wgłębiania się w zadanie skoncentrujmy się na jednym elemencie – trójkącie rozwartokątnym – i zastanówmy się, jaka własność odróżnia go od wszystkich innych trójkątów:

– jeden z kątów ma miarę większą od 90°,
– tylko jeden spodek wysokości leży na boku,
– jeden wierzchołek leży wewnątrz okręgu o średnicy będącej przeciwległym bokiem,
– jeden z wierzchołków leży na zewnątrz pasa wyznaczonego przez styczne do okręgu o średnicy będącej przeciwległym bokiem,
– jeden z boków spełnia nierówność $c^2 > a^2+b^2$.

Na razie żadna z tych własności nie wydaje się przybliżać nas do rozwiązania zadania. Ale też żadna nie jest uniwersalną własnością całego trójkąta rozwartokątnego, bo jeden z jego elementów daną własność ma, a inny nie. Szukajmy dalej: środek okręgu opisanego leży na zewnątrz trójkąta. Ta własność nie wyróżnia żadnego elementu trójkąta i stanowi klucz do rozwiązania zadania. Wystarczy bowiem wybrać 100 punktów leżących na półokręgu bez końców.

Czy liczba $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$ *jest wymierna czy niewymierna?*

Zapominamy o logarytmach i wymierności. Skupiamy się tylko na liczbach $(\sqrt{2}-1)$ i $(\sqrt{2}+1)$, które nieodparcie kojarzą się ze wzorem skróconego mnożenia $(a-b)(a+b) = a^2+b^2$. Wynika z niego, że iloczyn danych liczb wynosi 1, jedna z nich jest więc odwrotnością drugiej, zatem szukany logarytm wynosi (-1) i jest wymierny.

Oglądanie w lustrze to odwracanie pytania sformułowanego w zadaniu lub zastępowanie go pytaniem przeciwnym. Oto przykłady zadań, które można łatwo rozwiązać tą metodą.

W eliminacjach do turnieju tenisowego bierze udział 120 zawodników. Turniej jest rozgrywany systemem „przegrywający odpada". Ile meczów trzeba rozegrać, aby wyłonić zwycięzcę?

Zamiast koncentrować się na zwycięzcy, zapytajmy, ilu jest przegranych. Jeśli rozgrywki zaczyna 120 graczy, to 119 musi odpaść. Każdy przegrany gra tylko raz, a więc do wyłonienia zwycięzcy wystarczy 119 meczów.

Czy nierówność $\sqrt{n^{2n}} = n^n$ *jest prawdziwa dla* $n = 44^{44} - 55^{55}$*?*

W tym przypadku łatwiej powiedzieć, kiedy dana nierówność nie jest prawdziwa. Jest tak wtedy, gdy liczba n^n jest ujemna, czyli gdy n jest ujemne i nieparzyste. I tak właśnie jest z liczbą podaną w zadaniu.

Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste a, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $[x+a] = [x]+a$.

Natychmiast widać, że nierówność nie zachodzi dla niecałkowitych a (wtedy prawa strona nie jest całkowita, a lewa jest zawsze całkowita). Potem wystarczy tylko sprawdzić, że dla całkowitych a nierówność jest spełniona.

Dawkowanie przyjemności, czyli jakie zadania wybierać

Koło matematyczne powinno sprawiać uczniom (i nam też) radość i satysfakcję. A przyjemności należy dawkować z umiarem, więc nie działajmy pospiesznie, nie przesadzajmy z liczbą zadań, zostawmy czas na delektowanie się nimi, swobodne dyskusje o założeniach, modelach, możliwych uogólnieniach, na zbadanie intuicji istnienia i liczby rozwiązań, na odgadywanie odpowiedzi i wreszcie na rozważanie różnych sposobów dochodzenia do rozwiązania. Pamiętając, że lepiej rozwiązać jedno zadanie dziesięcioma sposobami niż dziesięć zadań, ale wszystkie tym samym sposobem, zachęcajmy uczniów do poprawiania własnych rozwiązań, poszukiwania sposobów krótszych, bardziej elementarnych, mniej rachunkowych, graficznych itp.

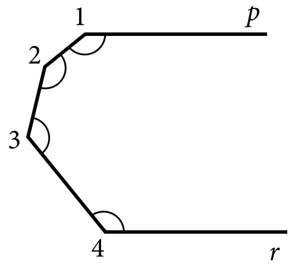
Pamiętajmy, żeby zadania nie przypominały standardowych przykładów opatrzonych do znudzenia w szkolnych podręcznikach, ale żeby łamały schematy myślenia. Zadbajmy o to, by się znalazły wśród nich także takie typy:

- z nadmiarem danych (co może prowadzić do sprzeczności danych i braku rozwiązania, ale nie musi),
- z niedoborem danych (co może prowadzić do niemożności lub niejednoznaczności rozwiązania),
- z danymi nieprecyzyjnymi (treść zadania jest niejednoznaczna i należy ją najpierw doprecyzować),
- o dyskusyjnych odpowiedziach,
- z „hakiem" (podchwytliwe, wymagające niestandardowego podejścia),
- z „przymrużeniem oka" (żarty matematyczne),
- wielopoziomowe (tzw. ziarenka [ang. *points of departure*], niemające ustalonego stopu),
- otwarte (bez znanego rozwiązania lub bez narzucającej się metody postępowania),
- antyschematyczne (żmudnie rozwiązywalne ogólnym algorytmem, ale z natychmiastowym rozwiązaniem nietypowym).

Często trudność stanowi już samo rozpoznanie typu danego zadania. Oto przykłady takich zadań dla różnych poziomów edukacyjnych.

Proste p i r są równoległe, a kąt 3 ma miarę 53° (rys. 4). Znajdź sumę miar kątów 1, 2, 3 i 4.

To zadanie z nadmiarem danych. Nie prowadzi ono jednak do sprzeczności, bo suma miar danych kątów jest stała i nie zależy od miary żadnego z nich.



Rys. 4

Jaki obwód ma romb o przekątnych długości 8 i 10 oraz o wysokości 5?

Tu również występuje nadmiar danych, ale tym razem są one sprzeczne, bo pole obliczone dwoma sposobami wychodzi różne.

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę 30°, a boki AC i BC mają długości odpowiednio $\sqrt{3}$ *oraz 1. Wyznacz długość boku AB.*

Tu mamy do czynienia z niedoborem danych, prowadzącym do niejednoznaczności wyniku. Możliwe są dwie odpowiedzi: $|AB| = 1$ lub $|AB| = 2$.

Z zagrody uciekło cztery piąte kur, ale po godzinie dwie trzecie wróciło. Jaka część stada była po godzinie w zagrodzie?

Zadanie ma nieprecyzyjną treść. Nie wiadomo, czy wróciło 2/3 wszystkich kur, czy tych, które uciekły. Bez doprecyzowania tego, zadania nie da się rozwiązać.

Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste trzykrotnie większe od liczby do siebie a) przeciwnej, b) odwrotnej.

To zadanie z dyskusyjną odpowiedzią. Możliwe wyniki to: a) 0 (tylko czy zero jest większe od zera, skoro jest równe zeru?), b) $\sqrt{3}$ i $-\sqrt{3}$ (tylko czy $3\cdot(-\sqrt{3})$ jest trzy razy większe od $\sqrt{3}$, skoro jest od tej liczby mniejsze?).

Jakie liczby zwiększymy przez skreślenie cyfry z lewej strony?

To zadanie-żart. Odpowiedź to np. IV lub IX.

Czy to możliwe, że $2\cdot 2 > 100$*?*

To zadanie „z hakiem". Nierówność taka zachodzi w systemie trójkowym.

Jak z 4 zapałek ułożyć 5 kątów prostych?

To kolejny przykład zadania „z hakiem". Można tego dokonać w przestrzeni.

Najwdzięczniejszym typem zadań kółkowych są zadania wielopoziomowe. Ich cel nie jest precyzyjnie określony i dzięki temu każdy uczeń może pracować nad nimi na miarę swoich możliwości. Każdy zajdzie w procesie rozwiązywania w inne miejsce, tak daleko, aż mu się znudzi lub napotka trudność, której nie potrafi pokonać ani ominąć. To samo zadanie często nadaje się zarówno dla uczniów z młodszych klas szkoły podstawowej, jak i z klas maturalnych. Rozwiązanie polega na opracowaniu innowacyjnych strategii opartych na dobrym planowaniu, stawianiu hipotez i wyciąganiu wniosków. Oto przykład.

W parku miejskim stoi sześć posągów. Są tak rozmieszczone, że żadne trzy nie stoją na jednej prostej, a każde dwa wyznaczają alejkę. Ile jest tych alejek?

Starsi uczniowie mogą rozważać większą liczbę posągów (aż osiągnie n) oraz zmieniać się metoda rozwiązania (od wykonania rysunku i zliczania przekątnych n-kąta po obliczenia kombinatoryczne).

Jeśli powyższe zadanie nieco zmodyfikujemy, zmieni się w ciekawy problem otwarty.

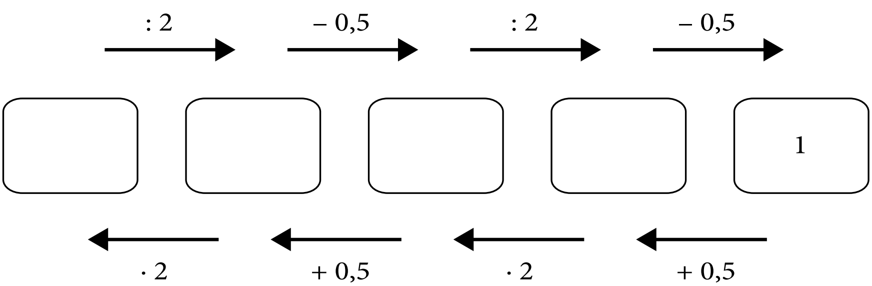
Parkowy ogrodnik musi codziennie oczyścić każdy posąg. W jakiej kolejności powinien je obejść?

Doprecyzowując treść, można postawić wiele warunków: liczba alejek, po których przejdzie ogrodnik ma być najmniejsza z możliwych, ogrodnik nie powinien poruszać się dwa razy po tej samej ścieżce, ogrodnik powinien pokonać najkrótszą drogę itp.

Oto kolejne przykłady pokazujące, jak ważne jest wybranie odpowiedniej metody rozwiązania zadania, która nie tylko umożliwi otrzymanie wyniku, ale zminimalizuje włożony w to wysiłek.

Na targu stała przekupka sprzedająca jajka. Pierwszej osobie sprzedała połowę wszystkich jajek i jeszcze pół jajka, drugiej osobie połowę jajek, które zostały i jeszcze pół jajka. Wtedy w koszyku zostało jej jedno jajko. Wszyscy kupujący dostali swoje jajka w całości. Ile jajek miała przekupka na początku?

Im starsi uczniowie, tym większa może być liczba klientów przekupki. Schematyczne rozwiązanie polega na oznaczeniu przez x początkowej liczby jajek i ułożeniu równania, ale przy 3 lub 4 kupujących ten sposób robi się skomplikowany. A może by tak odgadnąć odpowiedź? Liczba jajek musi być nieparzysta (bo były sprzedawane w całości) i większa od dwukrotności jedynki zwiększonej o 1/2, czyli od 2,5. Nie może to być ułamek, więc liczba musi być większa od 3, a także od dwukrotności trzech zwiększonej o ½, czyli od 6,5. Ale nadal nie może być ułamkiem, więc wynosi 7. Rozumowanie prowadzone jest „od tyłu", a treść można zilustrować (rys. 5), co też prowadzi bezpośrednio do znalezienia odpowiedzi.

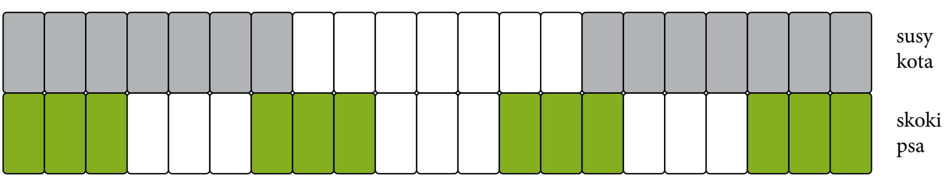


Rys. 5

Zastosowanie metody graficznej znacznie skraca rozwiązanie i pozwala na uniknięcie błędów, które mogą się pojawić w metodzie równań. Zadanie można modyfikować, nie podając liczby jajek, które pozostały, lub dorzucając klientom zamiast połówek trzecie, czwarte, n-te części jajka.

Kot goni psa, który jest oddalony od kota o 60 swoich skoków. Trzy susy kota są równe siedmiu skokom psa. W tym samym czasie kot wykonuje 6 susów, a pies 9 skoków. Po ilu susach kot dogoni psa?

Pomocniczy rysunek (rys. 6) przedstawiający dane z zadania pozwala ustalić, że sus kota to $2\frac{1}{3}$ skoku psa. Przedłużanie rysunku aż do uzyskania rozwiązania jest uciążliwe, ale można łatwo ułożyć i rozwiązać odpowiedni układ równań.



Rys. 6

Można też przeprowadzić proste rozumowanie. Skoro 3 susy kota, to 7 skoków psa, to $2 \cdot 3$ susów kota daje $2 \cdot 7$ skoków psa, czyli gdy kot zrobi 6 susów (równych 14 skokom psa), to pies zrobi tylko 9 skoków. Zatem dystans między nimi skraca się w tym czasie o $14-9 = 5$ skoków psa. Początkowa odległość to 60 skoków psa, więc aby nadrobić ten dystans, kot musi zrobić $60:5 = 12$ serii po 6 susów, czyli 72 susy.

Wartościowym doświadczeniem jest rozwiązywanie zadań łamiących schematy, pokazujących, że zalgorytmizowane, rutynowe szukanie odpowiedzi może bardzo skomplikować rozwiązanie zadania w szczególnym przypadku. Oto przykłady.

Rozwiąż nierówność $|x-2|+|x-3| < 3/4$.

Zamiast rozważania trzech przypadków układu znaków zmiennej x i usuwania wartości bezwzględnej skorzystamy z interpretacji geometrycznej modułu różnicy jako odległości liczb na osi. Szukamy zatem takiej liczby x, której suma odległości od dwójki i trójki jest mniejsza od ¾, ale takich liczb nie ma, gdyż dla każdego punktu prostej ta suma wynosi co najmniej 1.

Rozwiąż nierówność $\sqrt{4x-4-x^2} \le x^{2013}+2013$.

Równanie wygląda na skomplikowane, a jego rozwiązanie (o ile da się znaleźć) musi być żmudne. Wystarczy jednak zbadać dziedzinę równania, aby się przekonać, że jest jednopunktowa i wynosi {2}, wystarczy więc (bardzo prosto) sprawdzić, czy 2 spełnia to równanie.

Zamiast zakończenia

Planując pracę koła matematycznego, nauczyciel powinien określić:

- adresata,
- cele i produkt finalny,
- sposób organizacji,
- tematykę,
- sprzymierzeńców, partnerów i sponsorów,
- przewidywane korzyści dla uczestników, szkoły, sponsorów,
- potencjalnych przeciwników i przewidywane trudności,
- możliwe sposoby pokonania trudności i wykorzystania ewentualnego sukcesu.

Na zajęciach koła matematycznego przyzwyczajmy uczniów do samodzielnej eksploracji wiedzy, pokonywania barier poznawczych lub obchodzenia ich przez przeformułowanie problemu, minimalizowania wysiłku prowadzącego do znalezienia odpowiedzi. Rozwija to ich potencjał intelektualny, przygotowuje do udziału w konkursach i prowadzenia własnych prac badawczych.

Błędem jest zbytnie wiązanie zawartości koła z matematyką szkolną, powielanie podczas zajęć treści, które występują na lekcjach, nawet w formie rozwiązywania zadań „na szóstkę". Na kółku tematy szkolne mogą być jedynie rozszerzane i uatrakcyjniane, ale bez wkraczania do programów wyższych etapów edukacyjnych.

Zajęcia koła matematycznego trzeba traktować z przymrużeniem oka, ale rzeczowo, jako dobrą zabawę i okazję do zaprzyjaźnienia się z matematyką, jednocześnie i tylko przy okazji wzbogacającą ogromnie zasób wiedzy i umiejętności uczniów. Zachęcajmy, intrygujmy, pokazujmy uczniom to, od czego zaczęła się nasza własna fascynacja matematyką. Pozwalajmy im na dużą swobodę w doborze problemów i metod pracy nad nimi, poznajmy ich zainteresowania i postarajmy się, aby na zajęciach koła mogli je rozwijać i zaspakajać własne potrzeby intelektualne.

2. Koma – łowimy talenty

Małgorzata Mikołajczyk, Wrocław

W tym rozdziale prezentujemy założenia i zasady konkursu matematycznego KOMA, który okazał się bardzo skutecznym narzędziem odkrywania uczniów o wysokim potencjale uczenia się. Oprócz proponowanej tematyki zajęć podajemy skrót przykładowego wykładu finałowego z matematyki pozaszkolnej wraz z kartami zadań dla uczniów. Ewenementem w skali kraju jest to, że zarówno wykład, jak i zadania są te same dla wszystkich poziomów edukacyjnych.

Konkurs matematyczny KOMA jest organizowany we Wrocławiu od 2005 roku dla uczniów ze wszystkich typów szkół w kategoriach SP, GM, LO. Ma niespotykaną formę, nie korzysta bowiem z wcześniej zdobytej szkolnej wiedzy ucznia. Celem konkursu nie jest sprawdzenie, ile uczeń już umie, ale jak duży jest jego potencjał intelektualny i możliwości uczenia się. Zatem konkurs ten jest skierowany nie tylko do najlepszych matematyków, a praktyka pokazuje, że często odnoszą w nim sukcesy inteligentni i błyskotliwi uczniowie, którzy wcześniej nie wykazywali specjalnego zainteresowania matematyką. Dzięki takiej formule konkurs może z powodzeniem pełnić funkcję sita wyławiającego potencjalne talenty, a odniesione przez uczniów sukcesy i satysfakcja z osiągniętych wyników motywują uczniów do rozwijania matematycznych zainteresowań.

Informacje organizacyjne

W KOMIE ważna jest umiejętność słuchania ze zrozumieniem i przetwarzania informacji, a w przypadku starszych uczniów – także robienia dobrych notatek. Konkurs zaczyna się wykładem z ćwiczeniami dotyczącym zupełnie nowego dla słuchaczy pojęcia. Ma raczej formę luźnej pogadanki, podczas której słuchacze mogą zadawać pytania. Po nim jest przerwa na uporządkowanie notatek, rozmowy z kolegami, nauczycielami, rodzicami i wykładowcą, zadawanie pytań i wyjaśnianie wątpliwości. Potem następuje część zadaniowa, w której można korzystać ze sporządzonych wcześniej notatek. Zadania etapu eliminacyjnego i finałowego są testowe, ale mają różne formy: jedno- i wielokrotnego wyboru, uzupełnienia, krótkiej odpowiedzi i inne. Pozwala to na szybkie sprawdzenie zadań po konkursie.

Wykłady eliminacyjne nie odbiegają daleko od programu szkolnego i są różne dla różnych typów szkół. Odbywają się w szkołach, często na lekcjach dla całych klas lub po lekcjach dla grupy uczniów zebranych ze szkoły. Po wykładzie tylko chętni uczniowie uczestniczą w części zadaniowej pisanej wspólnie dla całej szkoły. Nauczyciele otrzymują drogą e-mailową notatki do wykładu lub gotowy pokaz komputerowy, mogą też wcześniej sami uczestniczyć w symulacji wykładu eliminacyjnego. Jest to okazja, żeby się przygotować do zajęć, przedyskutować powstałe problemy, zadać pytania autorom wykładu i zadań. Prace eliminacyjne sprawdza komisja szkolna i przesyła organizatorom wyniki. Na ich podstawie ustalany jest próg kwalifikacji do finału i lista zakwalifikowanych pojawia się w internecie. W każdej grupie wiekowej bierze w finale udział około 200 uczniów: trzech najlepszych z każdej szkoły oraz wszyscy z wynikami powyżej progu.

Przykładowe tematy eliminacji na poszczególnych etapach edukacyjnych były następujące:

- SP: Systemy pozycyjne, Sufit i podłoga, Trójkąt Pascala, Potęgowanie,
- GM: Cechy podzielności w systemach pozycyjnych, Dwumian Newtona, Kąty i okręgi,
- LO: Nierówności między średnimi, Liczby zespolone, Składanie przekształceń.

Wykłady finałowe dotyczą tego samego zagadnienia dla wszystkich poziomów szkół, powtarza się też około 90% zadań, co jest ewenementem wśród konkursów matematycznych. Co ciekawe, analiza wyników z wielu lat wskazuje, że wiek uczniów i ich wcześniejsza wiedza nie mają w tym konkursie decydującego znaczenia, ponieważ wyniki laureatów z różnych grup wiekowych są zbliżone. Na zakończenie odbywa się druga część wykładu, dotycząca zastosowań poznanego właśnie pojęcia. W tym czasie jury ocenia prace i wyłania zwycięzców. Wykładowcy prowadzący zajęcia finałowe zgodnie przyznają, że rzadko zdarza im się mieć tak skupione, zmotywowane i żywo reagujące audytorium. Widać intrygujący temat, ciekawa narracja i domieszka adrenaliny robią swoje.

Przykładowe tematy finałów dla wszystkich etapów edukacyjnych były następujące: Permutacje, Różnica symetryczna, Symetryzacja Steinera, Rozproszenie zbiorów, Geometria papieru w kropki.

Poniżej prezentujemy przykładowy zestaw eliminacyjny oraz finałowy do wykorzystania na dowolnym poziomie edukacyjnym. Oba dotyczą arytmetyki liczb naturalnych, co umożliwia porównanie ich charakteru, stopnia trudności materiału i pokrewności z programem nauczania w eliminacjach i w finale. Więcej informacji i zadań można znaleźć na stronie internetowej konkursu: www.fmw.uni.wroc.pl, zakładka: Dla uczniów >KOMA.

Eliminacje szkolne – Silnie i słabnie

Szkic zawartości wykładu

Działania na liczbach, jakie poznajemy w szkole, są zazwyczaj dwuargumentowe, to znaczy potrzeba dwóch liczb, aby podać wynik działania, na przykład dodawania lub mnożenia. Istnieją też działania jednoargumentowe, na przykład operacja podnoszenia do kwadratu, brania modułu lub liczby przeciwnej. Poniżej prezentujemy kilka mniej znanych działań jednoargumentowych.

Dla liczb całkowitych dodatnich definiujemy następujące działania:

$n!$ [czytaj: en silnia] $= 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$, jest to iloczyn kolejnych liczb naturalnych nieprzekraczających n (np. $5! = 120$),

$n?$ [czytaj: en słabnia] $= 1+2+3+\ldots+n$, jest to suma kolejnych liczb naturalnych nieprzekraczających n (np. $5? = 15$),

$n!!$ [czytaj: en podwójna silnia], jest to iloczyn kolejnych liczb naturalnych nieprzekraczających n, o tej samej parzystości co n (np. $6!! = 48$),

$n??$ [czytaj: en podwójna słabnia], jest to suma kolejnych liczb naturalnych nieprzekraczających n, o tej samej parzystości co n (np. $7?? = 16$),

$n\$$ [czytaj: en supersilnia] $= 1!\cdot2!\cdot3!\cdot\ldots\cdot n!$, jest to iloczyn silni kolejnych liczb naturalnych nieprzekraczających n (np. $4!! = 288$),

$n£$ [czytaj: en supersłabnia] $= 1?+2?+3?+\ldots+n?$, jest to suma słabni kolejnych liczb naturalnych nieprzekraczających n, np. $4?? = 20$, *n*# [czytaj: en pierwsznia silna], jest to iloczyn kolejnych liczb pierwszych nieprzekraczających *n*, (np. 15# = 2310),

n ⧣ [czytaj: en pierwsznia słaba], jest to suma kolejnych liczb pierwszych nieprzekraczających *n*, (np. 15 ⧣ = 28).

Ćwiczenia

1. Co jest większe: 100! czy 100^{100}?

Wskazówka: 100! = 1·2·3·…·100, 100^{100} = 100·100·…·100; w każdej liczbie jest 100 czynników, ale w tej drugiej czynniki są większe.

2. Co jest większe: 1000! czy 200^{200}?

Wskazówka: 1000! = 200!·201·202·…·1000, 200^{200} = 200·200·…·200; w drugiej liczbie jest 200 czynników równych 200, a w pierwszej jest 800 czynników większych od 200 i jeszcze czynnik większy od 1.

3. Czy 15! dzieli się przez: 11, 33, 16, 12!, 17?

Wskazówka: Z podanych liczb nie dzieli się tylko przez 17, gdyż jest to liczba pierwsza i nie występuje jako czynnik w 15!

4. Oblicz NWD i NWW liczb: 10! i 13!, 110! i 11!, 11! i 12, 10! i 11.

Wskazówka: NWD (110!, 11!) = 11!, NWW(110!, 11!) = 110!

5. Jaka jest parzystość liczb: podwójna silnia liczby nieparzystej, podwójna słabnia liczby parzystej, pierwsznia silna liczby nieparzystej, pierwsznia słaba liczby parzystej.

Wskazówka: pierwsznia silna dla jedynki nie istnieje, dla większych liczb jest zawsze parzysta, gdyż zawiera czynnik 2.

6. Ile zer jest na końcu liczby 27!?

Wskazówka: Zera na końcu liczby biorą się z dziesiątek w rozkładzie, czyli z iloczynów dwójek i piątek, a tak naprawdę z tego z tych dwóch czynników, którego jest w rozkładzie mniej. W silni dwójek jest zawsze więcej niż piątek, jako że co druga liczba dzieli się przez 2, a tylko co piata przez 5, więc wystarczy zliczać piątki, na przykład wykonując dzielenie całkowite liczby *n* przez 5, pamiętając jednak, że wielokrotności 25 wnoszą po 2 piątki do rozkładu, wielokrotności 125 wnoszą po 3 itd. Wzór na liczbę zer na końcu *n*! można zapisać tak:$[n/5]+[n/25]+[n/125]+\ldots$, gdzie [.] oznacza część całkowitą liczby.

7. Oblicz sprytnie, ile wynosi 2010?.

Wskazówka: Słabnie to sumy początkowych odcinków liczb naturalnych, czyli szczególne ciągi arytmetyczne. Obliczamy je, sumując ich składniki dwukrotnie, ale w odwróconym porządku, i dzieląc przez 2. Otrzymujemy

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+2+3+\ldots+n-2+n-1+n+\\+n+n-1+n-2+\ldots+3+2+1\end{pmatrix}=\frac{(1+n)n}{2}$$

8. Jak za pomocą słabni i działań arytmetycznych zapisać sumą dowolnego ciągu arytmetycznego o wyrazach naturalnych?

Wskazówka: np. 13+18+23+…+63 = 13+(13+5)+(13+10)+…+(13+50) =
= 13·11+5(1+2+…+10) = 13·11+5·10?.

9. Jaka jest reszta z dzielenia liczb 10? oraz 10£ przez 2, 3 i 5?

Wskazówka: Zaobserwuj okresowy ciąg reszt z dzielenia słabni i supersłabni kolejnych liczb.

10. Podaj, dla jakich naturalnych *n* liczba *n*! dzieli się przez *n*?.

Wskazówka. Podzielność zachodzi dla *n* = 1 oraz dla wszystkich *n* takich, że *n* + 1 jest liczbą złożoną.

Zadania konkursowe

W zadaniach 1–12 na każde pytanie odpowiedz „tak” lub „nie”.

Zad. 1. Określ, czy podana liczba jest całkowita.

a) 15!:125 b) 16!:36 c) 17!:37 d) 99!:2010

Zad. 2. Określ, czy podana liczba jest podzielna przez 10.

a) 29!:26! b) 30!:28! c) 35!:31! d) 36!:33!

Zad. 3. Czy prawdziwa jest nierówność?

a) $1000! > 1000^{1000}$ b) $100! < 10^{200}$ c) $1000! < 500^{500}$ d) $1234! < 1234^{1234}$

Zad. 4. Czy pierwsza z liczb dzieli się przez drugą?

a) (29!:26!) i 21 b) 28! i 29# c) 13# i 5! d) 100! i 100^2

Zad. 5. Czy dla każdej liczby pierwszej $p > 2$ zachodzi podzielność?

a) p! przez 2 b) p? przez p c) (p+1)!! przez 2^p d) p?? przez 2

Zad. 6. Czy dla podanych n liczba n£ jest parzysta?

a) n nieparzyste b) n pierwsze c) n złożone d) $n = 2009$

Zad. 7. Czy zachodzi podzielność?

a) 120? przez 5! b) 240?? przez 5! c) 99??+101?? przez 2 d) 100£ przez 10

Zad. 8. Czy podana liczba dzieli się przez 3?

a) 2009? b) 2009?? c) 2009£ d) 12345678?

Zad. 9. Każda liczba naturalna dzieli się przez (n + 1)! wtedy i tylko wtedy, gdy dzieli się przez n! i przez n+1. Czy to zdanie jest prawdziwe dla:

a) $n = 10$ b) $n = 11$ c) $n = 16$ d) $n = 2009$

Zad. 10. Czy słabnia liczby n jest podzielna przez n dla następujących liczb:

a) $n = 2008$ b) $n = 2009$ c) $n = 2010$ d) $n = 2011$

Zad. 11. Czy supersilnia liczby n jest podzielna przez n^2 dla następujących liczb:

a) $n = 10$ b) $n = 11$ c) $n = 100$ d) $n = 121$

Zad. 12. Czy podaną liczbę można przedstawić w postaci $m^2 \cdot n^3$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi?

a) $(13!)^{13} \cdot 11$ b) $(12!)^{12} \cdot 13$ c) $(10!)^{10} \cdot 17$ d) $(11!)^{11} \cdot 15$

W zadaniach 13–20 podaj odpowiedź w każdym przykładzie.

Zad. 13. Ile zer jest na końcu podanych liczb?

a) 33! b) 34!! c) 35!! d) 16$

Zad. 14. Jaka największa liczba jest jednocześnie dzielnikiem obu podanych liczb?
a) 11! i 12 b) 10! i 11 c) 10! i 27 d) 24! i 24^{24}

Zad. 15. Jaka najmniejsza liczba różna od zera jest jednocześnie wielokrotnością obu podanych liczb?
a) 11! i 12 b) 10! i 11 c) 10! i 27 d) 24! i 24^{24}

Zad. 16. Zapisz za pomocą symbolu słabni i działań arytmetycznych wyrażenia:
a) 5+10+15+20+25+...+190 b) 10+13+16+19+...+190
c) 10+28+46+64+...+190 d) 1+2+4+7+8+10+13+14+16+19+...+1000

Zad. 17. Zapisz, używając operacji arytmetycznych i symboli działań jednoargumentowych
a) $7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 107$ b) $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 7\frac{1}{2}$ c) $7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 107$ d) $10 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \ldots \cdot 190$

Zad. 18. Oblicz sprytnie, ile wynosi
a) 101£−99£ b) 101?−99??−100?? c) 5\$:4^4 d) 5\$:5!!

Zad. 19. Jakie reszty przy dzieleniu przez 4 mogą dawać następujące liczby?
a) supersilnia liczby pierwszej b) pierwsznia silna liczby pierwszej
c) słabnia liczby podzielnej przez 4 d) słabnia liczby nieparzystej

Zad. 20. Która z liczb jest większa?
a) 1000£ czy 1000000 b) 1000000£ czy 100\$ c) 1000! czy $500!^2$ d) $2^{100!}$ czy $100!^2$
e) 100! czy 100^{45} f) $(50!)^{100}$ czy $(100!)^{50}$ g) $2^{100!}$ czy $9^{99!}$

Odpowiedzi: 1. T T N T, **2.** N T T T, **3.** N T N T, **4.** T N N T, **5.** T T N N, **6.** N N N N, **7.** N T N T, **8.** T T N T, **9.** T N T N, **10.** N T N T, **11.** T N T T, **12.** T N N T, **13.** 7, 3, 0, 66, **14.** 12, 1, 27, $2^{22} \cdot 3^{10}$, **15.** 11!, 11!, 10!, $24! \cdot 24^{50} \cdot 3^{14}$, **16.** 5·38?, 610+3·60?, 110+18·10?, 167·(1+2+4)+18·166?, **17.** 107!/6!, $15!/2^{15}$, 107!!/5!!, $10^{19} \cdot 19!$ lub $5^{19} \cdot 38!!$, **18.** 10201, 101, 135, $2^8 \cdot 9 = 2304$, **19.** {0, 2}, {2}, {0, 2}, {0, 1, 2, 3}, **20.** >, <, >, >, >, <, >.

Finał regionalny – Wierzchołki piramid

Szkic zawartości wykładu z ćwiczeniami

Dla danej listy liczb L tworzymy nową listę $S[L]$ tak, że dodajemy i dzielimy przez 2 kolejne pary liczb, na przykład gdy $L = [1, 2, 4, 2, 5]$, to $S[L] = [{}^3/_2, 3, 3, {}^7/_2]$, $S[3, 5, 9] = [4, 7]$, $S[5, -5, 7, 11, -11] = [0, 1, 9, 0]$.

Ćwiczenie 1. Zgadnij, co się kryje pod kratkami: $S[1, 5, \square, 13] = [3, 4, 8]$, $S[\square, 4, 8, \square] = [3, \square, 5]$. Czasem z uzupełnieniem list może być kłopot, ponieważ można to zrobić na wiele sposobów albo żaden sposób nie jest dobry, na przykład $S[\square, 4, 8] = [3, 5]$, $S[\square, 4] = \square$.
Opisaną operację S uśredniania listy liczb można iterować, czyli powtarzać wiele razy,
na przykład $S^3[1, 2, 4, 2, 5] = S[S[S[1, 2, 4, 2, 5]]] = S[S[{}^3/_2, 3, 3, {}^7/_2]] = S[{}^9/_4, 3, {}^{13}/_4] = [{}^{21}/_8, {}^{25}/_8]$.

Wyniki kolejnych iteracji wygodnie jest notować w postaci piramidy, jak na diagramie obok. Możemy robić to tak długo aż pozostanie jedna liczba, którą nazwiemy wierzchołkiem piramidy i oznaczymy $W[L]$,
na przykład $W[1, 2, 4, 2, 5] = S^4[1, 2, 4, 2, 5] = S[{}^{21}/_8, {}^{25}/_8] = {}^{23}/_8$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \frac{23}{8} & & & & \\
 & & & \frac{21}{8} & & \frac{25}{8} & & & \\
 & & \frac{9}{4} & & 3 & & \frac{13}{4} & & \\
 & \frac{3}{2} & & 3 & & 3 & & \frac{7}{2} & \\
1 & & 2 & & 4 & & 2 & & 5
\end{array}$$

Ćwiczenie 2. Uzupełnij poniższe piramidy.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \square & & & \\
 & & \square & & \square & & \\
 & 4 & & 2 & & \square & \\
\square & & \square & & -1 & & 7
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & \square & & \square & & \\
 & \square & & -\frac{3}{2} & & \square & \\
\square & & -4 & & \square & & 5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \square & & & \\
 & & \frac{3}{8} & & 0 & & \\
 & \square & & \frac{1}{8} & & \square & \\
\frac{3}{2} & & \square & & \square & & -\frac{3}{4}
\end{array}$$

Ćwiczenie 3. Przy obliczaniu wierzchołków piramid zachodzą pewne ogólne prawidłowości. Czy potrafisz je uzasadnić?

a) $\boldsymbol{W[a, a, a, ..., a] = a}$

Na przykład $W[8, 8, 8, 8, 8] = 8$, bo wtedy cała piramida składa się z ósemek. Sprawdzimy to dla drugiego poziomu: $S[8, 8, 8, 8, 8] = [(8+8)/2, (8+8)/2, (8+8)/2, (8+8)/2, (8+8)/2] = [8, 8, 8, 8]$.

b) $\boldsymbol{W[c{\cdot}a_1, c{\cdot}a_2, c{\cdot}a_3, ..., c{\cdot}a_n] = c{\cdot}W[a_1, a_2, a_3, ..., a_n]}$

Na przykład $W[7{\cdot}2, 7{\cdot}3, 7{\cdot}(-4), 7{\cdot}5] = 7{\cdot}W[2, 3, -4, 5]$, bo wszystkie liczby w piramidzie o podstawie $[7{\cdot}2, 7{\cdot}3, 7{\cdot}(-4), 7{\cdot}5]$ powstają z przemnożenia przez 7 liczb z piramidy o podstawie $[2, 3, -4, 5]$. Sprawdzimy to dla drugiego poziomu: $S[7{\cdot}2, 7{\cdot}3, 7{\cdot}(-4), 7{\cdot}5] = [(7{\cdot}2+7{\cdot}3)/2, (7{\cdot}3+7{\cdot}(-4))/2, (7{\cdot}(-4)+7{\cdot}5)/2] =$
$= [7{\cdot}(2+3)/2, 7{\cdot}(3+(-4))/2, 7{\cdot}((-4)+5)/2] = [7{\cdot}(5/2), 7{\cdot}(-1/2), 7{\cdot}(1/2)]$.

c) $\boldsymbol{W[a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, ..., a_n+b_n] = W[a_1, a_2, a_3, ..., a_n]+W[b_1, b_2, b_3, ..., b_n]}$

Na przykład $W[2+5, 3+4, -4+11, 5+2] = W[2, 3, -4, 5]+W[5, 4, 11, 2]$, bo wszystkie liczby w piramidzie o podstawie $[2+5, 3+4, -4+11, 5+2]$ powstają z dodania odpowiednich liczb z piramid o podstawach $[2, 3, -4, 5]$ i $[5, 4, 11, 2]$. Sprawdzimy to dla drugiego poziomu: $S[2+5, 3+4, -4+11, 5+2] =$
$= [(2+5+3+4)/2, (3+4+(-4)+11)/2, ((-4)+11+5+2)/2] =$
$= [(2+5)/2+(3+4)/2, (3+4)/2+((-4)+11)/2, ((-4)+11)/2+(5+2)/2]$.

d) $\boldsymbol{W[a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n] = W[a_n, a_{n-1}, ..., a_3, a_2, a_1]}$

Na przykład $W[2, 3, -4, 5] = W[5, -4, 3, 2]$, bo piramida o podstawie $[5, -4, 3, 2]$ jest lustrzanym odbiciem piramidy o podstawie $[2, 3, -4, 5]$. Gdzie należy ustawić lusterko?

Zatem jeśli obliczymy, że $W[2, 3, -4, 5] = {}^1/_2$, to ten fakt możemy wykorzystać do obliczenia wierzchołków wielu innych piramid, na przykład:

- $W[10, 15, -20, 25] = W[5{\cdot}2, 5{\cdot}3, 5{\cdot}(-4), 5{\cdot}5] = 5{\cdot}W[2, 3, -4, 5] = 5{\cdot}{}^1/_2 = {}^5/_2$
- $W[-20, -30, 40, -50] = W[(-10){\cdot}2, (-10){\cdot}3, (-10){\cdot}(-4), (-10){\cdot}5] = (-10){\cdot}{}^1/_2 = -5$
- $W[1, {}^3/_2, -2, {}^5/_2] = W[{}^1/_2{\cdot}2, {}^1/_2{\cdot}3, {}^1/_2{\cdot}(-4), {}^1/_2{\cdot}5] = {}^1/_2{\cdot}{}^1/_2 = {}^1/_4$
- $W[3, 4, -3, 6] = W[2+1, 3+1, (-4)+1, 5+1] = W[2, 3, -4, 5]+W[1, 1, 1, 1] = {}^1/_2+1 = {}^3/_2$
- $W[1, 0, 7, -2] = W[3-2, 3-0, 3-(-4), 3-5] = W[3, 3, 3, 3]-W[2, 3, -4, 5] = 3-{}^1/_2 = {}^5/_2$

e) Poniższe przykłady ilustrują jeszcze inny pomysł na sprytne obliczanie wierzchołków niektórych piramid.

- $W[6, 6, 6, 6, 6, 0, 0, 0, 0, 0] = 2\cdot W[3, 3, 3, 3, 3, 0, 0, 0, 0, 0] =$
  $= W[3, 3, 3, 3, 3, 0, 0, 0, 0, 0]+W[0, 0, 0, 0, 0, 3, 3, 3, 3, 3] = W[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3] = 3$
- $W[1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2] = W[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]+W[0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1] =$
  $= 1+{}^1/_2\cdot(W[0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]+W[1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0]) = 1+{}^1/_2\cdot W[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] = 1+{}^1/_2\cdot 1 = {}^3/_2$
- $W[3, 5, 7, 9] = {}^1/_2\cdot(W[3, 5, 7, 9]+W[3, 5, 7, 9]) = {}^1/_2\cdot(W[3, 5, 7, 9]+W[9, 7, 5, 2]) =$
  $= {}^1/_2\cdot W[3+9, 5+7, 7+5, 9+2] = {}^1/_2 W[12, 12, 12, 12, 12, 12] = {}^1/_2\cdot 12 = 6$
- $W[1, 4, 7, 10, 13, 16] = {}^1/_2\cdot(W[1, 4, 7, 10, 13, 16]+W[1, 4, 7, 10, 13, 16]) =$
  $= {}^1/_2\cdot(W[1, 4, 7, 10, 13, 16]+W[16, 13, 10, 7, 4, 1]) = {}^1/_2 W[1+16, 4+13, 7+10, 10+7, 13+4, 16+1] =$
  $= {}^1/_2\cdot W[17, 17, 17, 17, 17, 17] = {}^1/_2\cdot 17 = {}^{17}/_2$
- $W[1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4] = {}^1/_2(W[1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4]+W[1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4]) =$
  $={}^1/_2\cdot(W[1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3,4]+W[4, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1]) =$
  $= {}^1/_2\cdot W[5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, {}^5,5,5] = {}^1/_2\cdot 5 = {}^5/_2$

f) Pokażemy jeszcze jedną własność wierzchołków piramid.

Niech $\{a_i\}$, $\{b_j\}$, $\{c_i\}$ są dowolnymi ciągami liczb, przy czym $\{a_i\}$ ma tyle samo wyrazów co $\{c_i\}$.

$W[\{a_i\}, 0, \{b_j\}, 0, \{c_i\}] = W[\{a_i\}, 1, \{b_j\}, -1, \{c_i\}] = W[\{a_i\}, -2, \{b_j\}, 2, \{c_i\}] = W[\{a_i\}, 5, \{b_j\}, -5, \{c_i\}] =$
$= W[\{a_i\}, -{}^2/_3, \{b_j\}, {}^2/_3, \{c_i\}]$

Wynika ona z poniższej prostej obserwacji.

Niech $\{0_i\}$ i $\{0_j\}$ oznaczają ciągi zer tej samej długości co ciągi $\{a_i\}$ i $\{b_j\}$.

$W[\{0_i\}, 1, \{0_j\}, -1, \{0_i\}] = W[\{0_i\}, 1, \{0_j\}, \{0_i\}]+(-1)\cdot W[\{0_i\}, \{0_j\}, 1, \{0_i\}] = W[\{0_i\}, 1, \{0_j\},$
$\{0_i\}]-W[\{0_i\}, 1, \{0_j\}, \{0_i\}] = 0$

Stąd wynika na przykład, że:

$W[\{a_i\}, -{}^2/_3, \{b_j\}, {}^2/_3, \{c_i\}] = W[\{a_i\}, 0, \{b_j\}, 0, \{c_i\}]+(-{}^2/_3)\cdot W[\{0_i\}, 1, \{0_j\}, -1, \{0_i\}] =$
$= W[\{a_i\}, 0, \{b_j\}, 0, \{c_i\}]+(-{}^2/_3)\cdot 0 = W[\{a_i\}, 0, \{b_j\}, 0, \{c_i\}]$.

Można też łatwo zobaczyć, że:

$W[\{a_i\}, 7, \{b_j\}, 3, \{c_i\}] = W[\{a_i\}, 9, \{b_j\}, 1, \{c_i\}] = W[\{a_i\}, 6, \{b_j\}, 4, \{c_i\}] = W[\{a_i\}, 5, \{b_j\}, 5, \{c_i\}]$,
wystarczy do pierwszej piramidy „dodać” odpowiednio $[\{0_i\}, 2, \{0_j\}, -2, \{0_i\}]$, $[\{0_i\}, -1, \{0_j\}, 1, \{0_i\}]$ lub $[\{0_i\}, -2, \{0_j\}, 2, \{0_i\}]$.

g) Można mozolnie sprawdzić, że zachodzą równości: $W[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0] = {}^7/_{128}$,
$W[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0] = 3\cdot W[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ i $W[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0] = 5\cdot W[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$.

Ta informacja pozwala łatwo obliczać wierzchołki niektórych piramid o podstawie długości 8, na przykład:

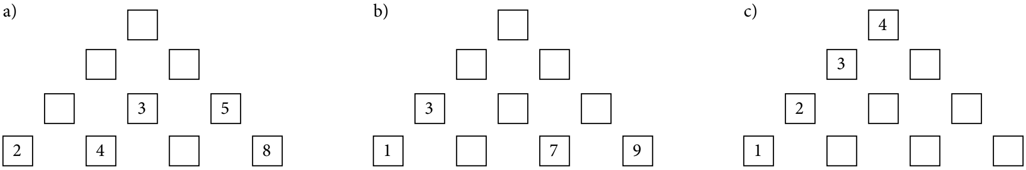
- $W[0, 2, 7, 0, 0, 0, 0, 0] = 2\cdot W[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]+7\cdot W[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0] = 2\cdot{}^7/_{128}+7\cdot 3\cdot{}^7/_{128} = 23\cdot{}^7/_{128}$
- $W[0, 1, 2, 6, 0, 0, 0, 0] = 1\cdot W[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]+2\cdot W[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]+6\cdot W[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0] =$
  $= 1\cdot{}^7/_{128}+2\cdot 3\cdot{}^7/_{128}+6\cdot 5\cdot{}^7/_{128} = 37\cdot{}^7/_{128}$
- $W[0, 5, 1, 2, 7, 1, 3, 0] = (5+3)\cdot W[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]+(1+1)\cdot W[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]+(2+7)\cdot W[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0] =$
  $= 8\cdot{}^7/_{128}+2\cdot 3\cdot{}^7/_{128}+9\cdot 5\cdot{}^7/_{128} = 59\cdot{}^7/_{128}$

Zadania konkursowe

Zad. 1. Uzupełnij zapisy.

a) $S[0, 4, 6] =$ **...**
b) $S[12, 4, 10, 2, 0] =$ **...**
c) $S^3[12, 4, 10, 2, 0] =$ **...**
d) $S[2, \square, 8] = [4, 7]$
e) $S[\square, \square, 8, 2] = [1, 6, \square]$
f) $S[\square, \square, \square, 2] = [{}^5/_2, {}^{22}/_4, 5]$

Zad. 2. Uzupełnij piramidy.



Zad. 3. Podaj po trzy różne podstawy L takie, że:

a) $S[L] = [-5, 2, 7]$, **b)** $W[L] = 1$, **c)** $W[L] = 0$

Zad 4. Ile wynosi suma wszystkich liczb w piramidzie o danej podstawie?

a) $[{}^2/_3, {}^2/_3, {}^2/_3, {}^2/_3, {}^2/_3, {}^2/_3]$ **b)** $[7, -7, 7, -7, 7, -7, 7, -7, 7, -7]$ **c)** $[7, -7, 7, -7, 7, -7, 7, -7, 7, -7, 7]$

d) $[-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$ **e)** $[8, -8, 8, -8, 8, 8]$

Zad. 5. Uzupełnij. Niech p oznacza ilość liczb w podstawie L pewnej piramidy.

a) Dla $p = 37$ ilość liczb w $S[L]$ jest równa …, a w $S^3[L]$ jest równa …

b) Ilość liczb w $S^{47}[L]$ jest równa 123, więc p = ...

c) Dla $p = 7$ ilość liczb w całej piramidzie jest równa ..., a dla $p = 8$ jest równa …

d) Jeśli w całej piramidzie jest 21 liczb, to p = ..., a jeśli jest ich 66, to p = ...

e) Jeśli w całej piramidzie jest 3 razy więcej liczb niż w podstawie, to p = ..., a jeśli jest ich 9 razy więcej, to p = ...

Zad. 6. Spośród podanych liczb podkreśl:

a) największą $W[173, 234, 439]$, $W[234, 173, 439]$, $W[173, 439, 234]$, $W[439, 234, 173]$

b) najmniejszą $W[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ,0]$, $W[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$, $W[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

c) najmniejszą $W[0, 2, 4, 6, 8]$, $W[2, 4, 6, 8]$, $2\cdot W[1, 2, 3, 4]$, $W[0, 2, 4, 6, 8, 10]$

d) największą $W[-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7]$, $(-2)\cdot W[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]$, $W\,[1, -2, -5, -8]$

Zad. 7. Wiadomo, że $W[0, 0, 1, 0, 0, 0]$ jest 10 razy większe od $W[1, 0, 0, 0, 0, 0]$ i 2 razy większe od $W[0, 1, 0, 0, 0, 0]$. Ile razy większa od $W[1, 0, 0, 0, 0, 0]$ jest liczba:

a) $W[0, 0, 4, 0, 0, 0]$ **b)** $W[0, 7, 0, 0, 0, 0]$ **c)** $W[1, 0, 2, 0, 0, 0]$ **d)** $W[0, 2, 3, 0, 0, 0]$

e) $W[2, 3, 4, 0, 0, 0]$ **f)** $W[-7, 0, 3, 0, 0, 0]$ **g)** $W[0, 0, 0, 2, 0, 0]$ **h)** $W[0, 3, 0, 0, 5, 0]$

Zad. 8. Wiadomo, że podstawa L piramidy składa się z trzech liczb, których suma jest równa sumie liczb z $S[L]$. Oceń wypowiedzi Karola Omyłka.

a) W L musi być choć jedno zero. **b)** Suma liczb z L musi być równa zero.

c) W L musi być liczba ujemna. **d)** Wszystkie liczby z L muszą być równe 0.

e) Suma liczb z $S[L]$ musi być równa $2\cdot W[L]$. **f)** Suma liczb z L musi być równa $2\cdot W[L]$.

Zad. 9. Wpisz jeden ze znaków: $<$, $=$, $>$:

a) $W[22, 31, 2, 55, 32, 22, 2, 51, 47]$ .... $W[22, 31, 0, 55, 32, 22, 4, 51, 47]$

b) $W[22, 31, -1, 55, 32, 22, 5, 51, 47]$ .... $W[22, 31, 0, 55, 32, 22, 4, 51, 47]$

c) $W[22, 31, 3, 55, 32, 22, 2, 51, 47]$ .... $W[22, 31, 0, 55, 32, 22, 4, 51, 47]$

d) $W[22, 31, -2, 55, 32, 22, -2, 51, 47]$ .... $W[22, 31, 0, 55, 32, 22, 4, 51, 47]$
e) $W[4, 5, 7, 8, 9, 9, 9, 9, 8, 7, 5, 4]$ .... $W[8, 10, 14, 16, 18, 18, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$
f) $2 \cdot W[4, 5, 7, 8, 9, 9, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ .... $W[8, 10, 14, 16, 18, 18, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$
g) $W[2, 2, 2, 2, 2, 2, 9, 9, 8, 7, 5, 4]$ .... $W[8, 10, 14, 16, 18, 18, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$
h) $W[0, 0, 0, 0, 0, 0, 18, 18, 16, 14, 10, 8]$ .... $W[8, 10, 14, 16, 18, 18, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

Zad. 10. Oznaczmy $[k_m] = [1, 1, ..., 1, 0, 0, ..., 0]$ (k jedynek, m zer). Wtedy na przykład: $[9, 9, 3, 3, 0] = 6[2_3]+3[4_1]$, $2S[(2+3)_1] = [4_1]+[5_0]$. Zapisz tymi symbolami:
a) $[8, 7, 2, 1] = ...$ **b)** $[1, 6, 2, 5] = ...$ **c)** $[5, -6, 0, 1] = ...$
d) $S^8[k_0] = ...$ **e)** $4S[(k+4)_{m+8}] = ...$ **f)** $S^2[k_m] = ...$

Zad. 11. Niech $[k_m] = [1, 1, ..., 1, 0, 0, ..., 0]$ (k jedynek, m zer). Oblicz:
a) $W[k_1] = ...$ b) $W[k_2] = ...$ c) $W[k_k] = ...$ d) $W[5k_{5k}] = ...$

Odpowiedzi: 1. a) [2, 5], b) [8, 7, 6, 1], c) [7, 5], d) 6, e) -2, 4, 5, f) 2, 3, 8, **2.** wierszami: a) 2, 3, 3, 4, 7/2, b) 5, 6, 8, 9/2, 7, 23/4, c) 3, 5, 7, 4, 6, 5, **4.** a) 14, b) 0, c) 7, d) 0, e) 31 ½, **5.** a) 36, 34, b) 170, c) 28, 36, d) 6, 11, e) 5, 17, **6.** a) $W[173, 439, 234]$, b) $W[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$, c) $W[0, 2, 4, 6, 8]$, d) $W[1, -2, -5, -8]$, **7.** a) 40, b) 35, c) 21, d) 40, e) 57, f) 23, g) 20, h) 40, **8.** N N N N T T, **9.** =, =, >, <, =, =, <, =, **10**. a) $[1_3]+5[2_2]+[3_1]+[4_0]$, b) $-5[1_3]+4[2_2]-3[3_1]+5[4_0]$, c) $11[1_3]-6[2_2]-[3_1]+[4_0]$, d) $[k\text{-}8_0]$, e) $2[k+4_{m+7}]+2[k+3_{m+8}]$, f) $\frac{1}{4}[k_{m-2}]+\frac{1}{2}[k\text{-}1_{m-1}]+\frac{1}{4}[k\text{-}2_m]$, **11.** a) $1-\frac{1}{2^k}$, b) $1-\frac{k+2}{2^{k+1}}$, c) ½, d) ½.

Kontynuacja wykładu dotyczyła uogólnienia pojęcia uśredniania listy na: a) macierze kwadratowe, b) średnie geometryczne i harmoniczne oraz badania ich własności. Ponadto pokazano zastosowania operacji uśredniania list do wyznaczania stawki za grę sprawiedliwą w probabilistyce oraz pewne jej zastosowania w geometrii. Zauważmy bowiem, że na osi liczbowej $S(L)$ jest listą środków odcinków o końcach będących kolejnymi parami z listy L. Natomiast gdy elementami L są punkty płaszczyzny zapisane w układzie współrzędnych, to $S(L)$ również ma sens. Można bowiem dodawać punkty, dodając ich współrzędne i dzielić przez dwa każdą z nich, na przykład $S([\langle 2, 4 \rangle, \langle 0, 8 \rangle, \langle -2, -6 \rangle]) = [\langle 1, 6 \rangle, \langle -1, 1 \rangle]$. Zatem jeśli pomyślimy o L jako o łamanej, to $S(L)$ jest łamaną zbudowaną ze środków odcinków łamanej L. Odkryte wcześniej własności operacji uśredniania mają teraz swoje geometryczne interpretacje, które można poddać dalszym badaniom narzędziami geometrii (także z wykorzystaniem DGS).

3. Liga zadaniowa

Michał Śliwiński, Wrocław

Ligi zadaniowe są jednym z bardziej efektywnych sposobów zaangażowania w naukę przez zabawę zarówno w nauczaniu klasowo-lekcyjnym, na kółku lub obozie matematycznym, jak i w formie pozaszkolnej. W artykule przedstawiamy przykład klasowej ligi zadaniowej przed sprawdzianem dotyczącym trójkątów, przykłady lig pozaszkolnych na różne poziomy edukacyjne oraz lig tematycznych w obrębie matematyki (łamigłówkowa, kalkulatorowa, finansowa, lingwistyczna), które odwołują się do specyficznych, pozamatematycznych zainteresowań uczniów.

Czym jest liga zadaniowa

Liga zadaniowa to rozrywka intelektualna niezależna od wieku, możliwa do zrealizowania na każdym poziomie edukacji i matematycznego zaawansowania – od przedszkolaków po dorosłych, dojrzałych matematycznie, w tym nawet czynnych zawodowo matematyków. Odpowiednio skonstruowana i prowadzona daje możliwość zaangażowania uczestnika w bodaj wszystkie formy aktywności, jakie w matematyce i jej nauczaniu można sobie wyobrazić: naukę nowych treści, powtarzanie i wykorzystanie już znanych, odkrywanie zależności (również przez samodzielnie opracowane badania), stawianie hipotez oraz ich weryfikowanie, także na odpowiednio dobranych danych, i czynności zupełnie twórcze – definiowanie obiektów, tworzenie matematycznych bytów i miniteorii je opisujących.

Liga zadaniowa polega na cyklicznej publikacji (w prasie, internecie, gazetce szkolnej, klasie lub na korytarzu szkolnym) zestawów zadań, których rozwiązania uczestnicy konkursu dostarczają w ustalonym terminie organizatorom. Ci je oceniają, publikując co jakiś czas aktualny ranking zawodników.

Rodzaje lig zadaniowych

W obrębie tej ogólnej definicji mieści się wielka różnorodność możliwych wariantów organizacyjnych takich lig. Można na przykład ustalić, że rozwiązania kolejnych zestawów zadań należy oddawać zawsze przed upływem określonego czasu lub że wszystkie można oddać do zakończenia trwania całego konkursu i że uczniowie mogą pracować w grupach (i tak być klasyfikowani) lub indywidualnie.

Na warunki konkursu istotny wpływ mają również zasady punktacji. Rozwiązania można oceniać zero-jedynkowo (tj. zaliczone / niezaliczone, w tym z możliwością poprawy lub bez) albo przyznawać częściowe punkty także za rozwiązania nie w pełni poprawne. Każde zadanie może być warte tyle samo punktów, ale można też różnicować punktację, na przykład umieszczając w zestawie zadania za 3, 4 i 5 punktów. Przyznane punkty mogą być niezmienne, mogą również zależeć od terminu dostarczenia rozwiązania (wprowadzamy współczynnik tempa rozwiązania, który w kolejnych dniach / tygodniach maleje według ustalonej reguły) albo od liczby osób, które dane zadanie rozwiązały poprawnie (tzw. współczynnik trudności zadania, malejący ze wzrostem liczby jego poprawnych rozwiązań złożonych przez wszystkich zawodników, np. będący odwrotnością tej liczby). Dzięki wprowadzeniu współczynnika trudności nie trzeba ustalać z góry wartości danego zadania, jako że może się ono punktować samo (jest warte np. 1 punkt, kiedy bezbłędne rozwiązanie dostarczy jedna osoba, i $^1/_5$ – gdy poprawnych rozwiązań będzie 5).

Ligi zadaniowe mogą być ogólnodostępne (publikowane na portalu internetowym lub w czasopiśmie), albo przeznaczone tylko dla uczniów jednej szkoły lub klasy. Są też dobrym pomysłem na urozmaicenie pracy podczas rozmaitych obozów naukowych, zimowych szkół, warsztatów przygotowujących do egzaminów itd. Zwykle ligi są adresowane do określonego poziomu odbiorców (np. uczniów szkół podstawowych albo klas maturalnych), ale specyfika zadań pozwala nieraz uniknąć tego ograniczenia, jeśli zadania dotyczą na przykład elementarnej geometrii albo łamigłówek. Przy zachowaniu tych samych zadań i punktacji możliwe jest też prowadzenie odrębnej klasyfikacji uczestników według grup wiekowych (wtedy np. gimnazjalista może porównać swoje wyniki z wynikami starszych uczniów, natomiast laureaci ligi wyróżniani są osobno w swoich kategoriach).

Jeśli chodzi o typ zamieszczanych zadań, to jedynym ograniczeniem wydaje się być wyobraźnia i doświadczenie prowadzącego ligę. Konkurs może być jednodyscyplinarny, to znaczy dotyczyć na przykład tylko stereometrii (choćby wówczas, kiedy ten temat akurat realizuje się na lekcji albo kiedy uznamy, że jest to materiał, do którego powtórki chcemy jakoś zmotywować uczniów), albo interdyscyplinarny, przy czym można tak układać zestawy, by każdy zawierał jedno zadanie z geometrii, jedno z rachunku prawdopodobieństwa i jedno innego typu. Możemy organizować ligę zadań egzaminacyjnych albo ligę dość odległą od szkolnej matematyki, na przykład dotyczącą łamigłówek logicznych, geograficznych czy językowych – w zależności od zainteresowań uczniów lub gdy chcemy zachęcić ich do nauki nie tylko matematyki.

Jak zorganizować ligę zadaniową

Udział w lidze zadaniowej wymaga od uczniów dużej systematyczności i punktualności. Aby nie zniechęcać ich dodatkowymi trudnościami, warto wcześniej przemyśleć kwestię poziomu ich wiedzy i trudności publikowanych zadań. Nie powinny być ani za łatwe (zwłaszcza na początku!), ani zbyt trudne (zwłaszcza na początku!). Najlepiej w każdym zestawie umieszczać po jednym zadaniu łatwym (które zakładamy, że rozwiążą wszyscy), jednym średnim i jednym, które powinno stanowić wyzwanie dla najlepszych. Poziom trudności można oczywiście modyfikować z zestawu na zestaw po sprawdzeniu dotychczas złożonych rozwiązań.

Zadań w zestawie nie powinno być zbyt dużo, a odstępy między kolejnymi edycjami ligi nie powinny być ani zbyt długie (uczestnicy zapomną o kolejnej edycji), ani za krótkie (zadania nie zdążą być na czas rozpropagowane). Natomiast liczba zestawów może być dowolna (np. edycje codzienne na obozie matematycznym, cotygodniowe w lidze klasowej lub comiesięczne na portalu internetowym). Ważne jest, by odpowiednio często podawać bieżący ranking – dla uczniów element rywalizacji, możliwość porównania się z innymi oraz podsumowania własnych osiągnięć czy postępów są bardzo istotne i zwiększają motywację do dalszej pracy. Sensownie jest publikować tylko górną połowę stawki wyników, by nie demotywować słabszych uczestników ani nie narażać ich na zawstydzenie.

Aby maksymalnie wykorzystać możliwości dydaktyczne, jakie daje liga, zawodnicy powinni mieć możliwość systematycznej weryfikacji swoich rozwiązań. Najlepiej, gdyby mogli otrzymać je sprawdzone i ocenione, wiązałoby się to jednak z obciążeniem organizatorów dodatkową pracą i z mało efektywnym wysiłkiem zawodników, można więc poprzestać na publikacji prawidłowych rozwiązań oraz daniu uczestnikom możliwości skonsultowania oceny swojej pracy.

Warto podkreślić, że istotnymi zaletami konkursu ligowego, z punktu widzenia organizatorów, jest możliwość udziału w nim praktycznie nieograniczonej liczby zawodników, automatyzacji sprawdzania wyników i tworzenia rankingu, a z punktu widzenia uczestników – wygoda, gdyż zadania mogą rozwiązywać w dogodnym dla siebie czasie i miejscu, a ich przekazanie organizatorom może się odbywać bezpośrednio lub za pomocą poczty elektronicznej, tradycyjnej lub wewnętrznej (tj. przez wrzucenie rozwiązań do specjalnej skrzynki).

Różnego rodzaju ligi zadaniowe dla uczniów prowadzone są mniej lub bardziej regularnie w wielu szkołach (w tym na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu), na portalach internetowych związanych z edukacją i popularyzacją nauki (www.matematyka.wroc.pl, www.math.edu.pl, www.matematyka.pl, www.informatyka.wroc.pl, www.partnerstwodlaprzyszlosci.edu.pl) oraz w czasopismach, takich jak „Delta" czy „Magazyn Miłośników Matematyki". W internecie można też łatwo odnaleźć wiele lig międzynarodowych.

Liga klasowa jako powtórka przed sprawdzianem

Powiedzmy, że w danym tygodniu na lekcjach powtórzeniowych w LO realizujemy temat dotyczący trójkątów. Przygotowujemy 10 serii po trzy zadania o trójkątach i pierwszą serię rozdajemy wszystkim uczniom jako zadanie domowe. Uczniowie mogą odesłać odpowiedzi do zadań nauczycielowi drogą elektroniczną. Wtedy, o ile były one poprawne, otrzymują drugą serię zadań, a jeśli nie – informację, że gdzieś wystąpił błąd (za drugim razem można napisać, w którym jest zadaniu, a za trzecim – poprosić o szczegóły rozwiązania i odesłać enigmatyczne wskazówki). Po otrzymaniu prawidłowych odpowiedzi do zadań n-tej serii nauczyciel wysyła uczniowi serię $n+1$. Po tygodniu uczeń, który pierwszy ukończył ligę, otrzymuje nagrodę, a na lekcji wszyscy piszą kartkówkę dotyczącą trójkątów (z zadań bardzo podobnych do zadań ligowych).

Pracowaliśmy kiedyś w tym systemie przez cały semestr z uczniami klasy pierwszej III LO we Wrocławiu. Narzucone tempo było mordercze (dla obu stron), ale frekwencja była do końca bardzo wysoka. Uczniowie, którzy z różnych powodów nie chcieli brać udziału w wyścigach, podbierali kolegom zadania, żeby móc się przygotować do sprawdzianu. W efekcie (jak sami twierdzili po dwóch latach) do matury żadna powtórka z geometrii nie była im już potrzebna.

Oto przykładowy zestaw ligowych zadań:

SERIA I

1. W trójkącie ABC kąt B ma 120°, wysokość CD ma długość $\sqrt{3}$, a bok AC długość $\sqrt{19}$. Jakie jest pole tego trójkąta?

2. W trójkącie równoramiennym podstawa ma 20 cm, a ramiona mają 15 cm. Znajdź pole i wysokości tego trójkąta.

3. Trójkąt ma boki $AB = 10$, $AC = 6$ i $BC = 14$. Znajdź długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta C dzieli odcinek AB.

SERIA II

1. W trójkącie ABC bok $AB = 8$, a środkowa $CM = 5$. Kąt między AB i CM ma 45°. Znajdź pole trójkąta.

2. Znajdź promień okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny o podstawie 10 i ramionach 13.

3. Znajdź długości odcinków, na jakie dzieli przeciwprostokątną punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o bokach 5, 12, 13.

SERIA III

1. W trójkącie równoramiennym podstawa ma 6 cm, a ramiona mają 5 cm. Jaka jest odległość środka okręgu opisanego od podstawy?
2. Ramiona trójkąta równoramiennego równają się promieniowi okręgu opisanego. Znajdź kąty tego trójkąta.
3. Promień koła opisanego na trójkącie wynosi 6 i jest równy wysokości tego trójkąta. Jeden z boków ma długość 12. Ile wynosi pole trójkąta?

SERIA IV

1. W trójkącie równoramiennym podstawa AB ma długość $4\sqrt{2}$, a środkowa AK długość 5. Znajdź długości ramion.
2. Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny wynosi 2, a opisanego wynosi 5. Znajdź boki.
3. Znajdź kąty ostre trójkąta prostokątnego, wiedząc że wysokość i środkowa opuszczone z wierzchołka kąta prostego dzielą ten kąt na równe części (są trójsiecznymi kąta).

SERIA V

1. Ile wynosi suma odległości dowolnego punktu P, leżącego wewnątrz trójkąta równobocznego o boku a, od boków tego trójkąta?
2. Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $AC = 1$ i $BC = 2$ podzielono na dwie części o równych polach prostą prostopadłą do przeciwprostokątnej. Jaka jest długość odcinka tej prostej, zawartego wewnątrz trójkąta, i jaka jest odległość B od tej prostej?
3. Długości dwóch boków trójkąta wynoszą 12 i $12\sqrt{3}$, a promień okręgu opisanego wynosi 12. Ile ma trzeci bok?

SERIA VI

1. Ile wynoszą promienie okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a i opisanego na tym trójkącie?
2. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $AC = 6$ i $BC = 12$. Jaki jest promień okręgu stycznego do przyprostokątnych, o środku na przeciwprostokątnej?
3. Punkt wewnętrzny trójkąta równobocznego jest odległy od boków trójkąta o 1, 10 i 100. Jaki jest obwód tego trójkąta?

SERIA VII

1. Znajdź odległość między środkami okręgów wpisanego i opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych 10 i 24.
2. Punkt wewnętrzny trójkąta równobocznego jest odległy od wierzchołków trójkąta o 1, 10 i 100. Jaki jest obwód trójkąta?
3. W trójkąt równoramienny o podstawie 12 i ramionach 18 wpisano okrąg. Jaka jest odległość między punktami styczności na ramionach?

SERIA VIII

1. Odległość środka ciężkości trójkąta ABC od wysokości CF wynosi 6, a bok $AB = 20$. Jakie są długości odcinków, na jakie F dzieli AB?
2. W trójkąt równoramienny o podstawie 10 i ramionach 13 wpisano okrąg. Styczna do tego okręgu przecina ramiona w punktach P i Q. Znajdź długość odcinka PQ.
3. Prowadzimy dwie proste równolegle do dwóch boków trójkąta tak, że dzielą one trójkąt na 4 części o równych polach. Znajdź długości odcinków, na jakie proste te dzielą trzeci bok trójkąta, jeśli jego długość wynosi 2.

SERIA IX

1. Dane są długości boków trójkąta $a = 2$, $b = 4$ oraz długość środkowej poprowadzonej z ich wspólnego wierzchołka $s = \sqrt{3}$. Znajdź pole trójkąta.
2. Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny wynosi 3, a długość przeciwprostokątnej wynosi 15. Znajdź długości pozostałych boków.
3. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym wysokości $AD = 6$ i $BE = 8$ przecinają się w punkcie M i kąt AMB ma 150°. Oblicz pole trójkąta.

SERIA X

1. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg i dane są jego kąty A i B ($A < B$). Wyznacz kąt między prostą AB i styczną do okręgu w punkcie C.
2. W trójkącie prostokątnym promień koła wpisanego jest 5, a odległość między środkami kół wpisanego i opisanego na tym trójkącie jest 12. Oblicz obwód i pole trójkąta.
3. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości a i $2a$. Oblicz długość promienia okręgu stycznego do przyprostokątnych o środku leżącym na przeciwprostokątnej.

SERIA XI

1. W trójkącie prostokątnym długości boków są całkowite i jedna przyprostokątna wynosi 12. Jakie są długości pozostałych boków?
2. Pole trójkąta o bokach $a \leq b \leq c$ wynosi 1,5. Jaka jest co najmniej długość b?
3. W trójkącie ostrokątnym ABC długości AB, BC, AC są kolejnymi liczbami naturalnymi większymi od 3. Wysokość poprowadzona do boku BC dzieli go na 2 części. Jaka jest różnica długości tych części?

Ligi na WPM

Poniżej zamieszczamy wybór zadań z lig prowadzonych od 2007 roku na Wrocławskim Portalu Matematycznym (www.matematyka.wroc.pl). Odbywają się w cyklu roku szkolnego. Kolejne serie, zawierające po trzy zadania trwają miesiąc, a rozwiązania można przesyłać zarówno drogą elektroniczną, jak i tradycyjną pocztą. Zadania oceniane są na 0, ½ lub 1 punkt, a poprawne rozwiązania, omówienie błędów i aktualny ranking są publikowane po upływie terminu przesyłania odpowiedzi. W ostatnich latach udział w tych ligach bierze kilkuset zawodników (głównie uczniów) z całej Polski.

Ciekawostką jest fakt, że oprócz trzech lig stricte matematycznych – dla poziomu szkół podstawowych, gimnazjów i szkół ponadgimnzjalnych – na portalu są prowadzone ligi otwarte dla wszystkich – łamigłówkowa i komputerowo-kalkulatorowa, a także dwie ligi tematyczne: z lingwistyki matematycznej i matematyki finansowej. Ta ostatnia (sponsorowana przez Fundację Banku Zachodniego WBK) daje poza rywalizacją także bezpośrednią możliwość nauki. Zakładając zerową wiedzę wstępną uczestników, organizatorzy publikują co miesiąc krótki wykład, którego zrozumienie jest konieczne do rozwiązania danej serii zadań. Miniwykład jest wspólny, a zadania osobne dla poziomów: szkół podstawowych (!), gimnazjów i szkół ponadgimnazjalnych.

Poniżej prezentujemy przykładowe zestawy zadań z wymienionych typów lig.

Liga matematyczna dla szkół podstawowych

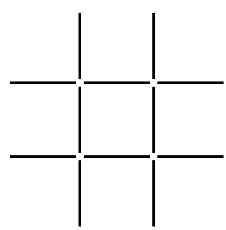
Zad. 1. 15 maja o $18^{\underline{00}}$ Smok Mlekopij zapadł w wiosenną drzemkę, z której obudził się w samo południe w Dzień Dziecka. Ile godzin przespał?

Zad. 2. W pokojowej demonstracji na rzecz uczniów szkół podstawowych wzięło udział ponad 1000 uczestników. Gdy próbowali ustawić się szóstkami, zostawało ich czworo. Nie mogli również ustawić się czwórkami, ale udało się uformować z nich szyk po 5 osób w rzędzie. Ilu demonstrantów było co najmniej?
Zad. 3. Z kartki wycięto cztery kwadraty o boku 4 cm. Następnie położono je na kartce z narysowanym kwadratem o boku 8 cm, tak że ich środki pokrywają się z wierzchołkami kwadratu na kartce, a boki są równoległe do jego boków. Jaką część kwadratu na kartce w ten sposób zakryto?

Liga matematyczna dla gimnazjów
Zad. 1. Ile jakich ścian ma bryła będąca najmniejszą figurą wypukłą, która zawiera środki wszystkich ścian danego sześcianu?
Zad. 2. Iloma zerami kończy się silnia liczby 4321?
Zad. 3. Dwóch wędrowców miało w sumie pięć bochenków chleba, z czego trzy należały do jednego, a dwa do drugiego. Podczas postoju dosiadł się do nich trzeci podróżnik, a że byli głodni, wspólnie zjedli cały chleb, przy czym każdy zjadł tyle samo. Ugoszczony chciał zapłacić dwóm towarzyszom za posiłek, ofiarowując im pięć solidów. Jak się powinni podzielić?

Liga matematyczna dla szkół ponadgimnazjalnych
Zad. 1. *T* jest trójkątem równoramiennym. Nazwijmy, niezależnie od ich położenia, wierzchołki jego podstawy przez *A* i *B*, trzeci wierzchołek przez *C*, a środek odcinka *AB* przez *D*. Podczas porannej gimnastyki *T* powtarza 2009 razy następującą sekwencję ruchów: przesunięcie o metr zgodnie z wektorem *DC*, obrót o 90° w prawo wokół prostopadłej do *T* prostej przechodzącej przez jego środek ciężkości, kolejne przesunięcie o metr zgodnie z (inaczej już wówczas położonym!) wektorem *DC* i obrót o 90° wokół prostej *CD*. Ile wynosi wypadkowe przemieszczenie środka ciężkości *T*?
Zad. 2. Ile miejsc zerowych ma funkcja $f(x) = \sqrt{x+1} - x + q$ w zależności od wartości q?
Zad. 3. Niech p oznacza liczbę pierwszą większą od 2. Ile różnych reszt z dzielenia przez p dają kwadraty liczb całkowitych? Uzasadnij odpowiedź!

Liga łamigłówkowa
Zad. 1. Przekładając jak najmniej zapałek w figurze z rysunku 1, uzyskaj nową figurę złożoną z trzech jednakowych kwadratów.


Rys. 1

Zad. 2. Czterech wędrowców zamierza przejść przez długi niebezpieczny most wiszący nad rwącą rzeką. Most jest w stanie udźwignąć najwyżej dwoje ludzi. Niestety, zapadła właśnie noc i przechodzący przez most muszą mieć przy sobie latarkę. Wędrowcy cechują się różną sprawnością fizyczną: jeden na pokonanie mostu potrzebuje co najmniej minuty, drugi – dwóch minut, trzeci – pięciu, a czwarty – dziesięciu. Czy mają szansę znaleźć się wszyscy na drugim końcu mostu w ciągu 17 minut, jeśli mają tylko jedną latarkę?
Zad. 3. Rozszyfruj szaradę: *litera+przyimek+pożegnanie = sofa.*

Zad. 1. Ojciec Kai ma cztery córki. Imiona trzech z nich to Zuzu, Zaza i Zeze. Jak może mieć na imię czwarta?
Zad. 2. Do dyspozycji masz trzy puste pojemniki: 7-, 6- i 3-litrowy oraz wypełniony wodą 15-litrowy. Jak spowodować, żeby w trzech pojemnikach było po 5 litrów wody?

Zad. 3. Poznajesz trzy osoby: jedna zawsze mówi prawdę, druga zawsze kłamie, a trzecia odpowiada według swojego widzimisię, przy czym każda z nich wie, która jest która. Jak to ustalić, zadając trzy (niekoniecznie różne) pytania, na które odpowiedziami są „tak" lub „nie"? Każde pytanie można zadać dowolnemu z trzech rozmówców.

Liga z lingwistyki matematycznej

Zad. 1. Większość polskich rzeczowników mających formy męskie i żeńskie tworzy żeńskie jako pochodne (tzw. derywaty) męskich, na przykład 'sędzina', 'heroina', 'królowa', 'kierowniczka', 'synowa' (czasem derywaty nie oznaczają znaczeniowych odpowiedników męskich form bazowych). Odwrotne zjawisko występuje jednak w wypadku słów 'wdowiec' i 'wdowa' – pierwsze jest pochodną drugiego. Dlaczego taka jest między nimi relacja? Podaj rzeczownik oznaczający kobietę, dla którego polszczyzna nie tworzy w ogóle formy męskiej.

Zad. 2. Poniżej lista kilku słów w trzech językach, z których dwa mają wspólnego przodka, a trzeci nie jest z nimi spokrewniony. Jak można ustalić, który jest tym trzecim?

język A	**język B**	**język C**	**znaczenie**
dakîka	dakika	daka	*minuta*
ra's	kichwa	roš	*głowa*
daftar	daftari	maxberet	*zeszyt*
šams	jua	šemeš	*słońce*
nafs	moyo	nefeš	*dusza*
habar	habari	xadaša	*wiadomość*
rigl	mguu	regel	*noga*
wizâra	wizara	misrad	*ministerstwo*

Zad. 3. Aby możliwie losowo zaburzyć porządek alfabetyczny, językoznawcy stosują nieraz słowniki *a tergo* (łac. 'od tyłu'), czyli spisy wyrazów w kolejności alfabetycznej ich końcowych liter. Na przykład uporządkowane *a tergo* są wyrazy 'żaba', 'człowiek', 'pies', 'kot'. Jaki jednowyrazowy polski liczebnik oznaczający liczbę mniejszą od biliarda będzie pierwszy, a jaki ostatni w ich spisie *a tergo*?

Zad. 1. Uzupełnij zdania.

A) Słowo PODA ma się tak do BODA, jak TOGA do ...

B) Słowo GABON ma się tak do PANGO, jak DEZEŃ do ...

C) Słowo PATAGOJ ma się tak do BODOKAJ, jak KOFOLA do ...

Zad. 2. Angielskie *three* jest liczebnikiem, który ma tyle głosek, ile wynosi nazywana przez niego liczba. Podaj wszystkie takie jednowyrazowe liczebniki polskie.

Zad. 3. Podano kilka równości arytmetycznych zapisanych w języku *L*. Podaj *A*, *B*, *C*. Co to za język?

fem·fir = tyve

fem·fem = femogtyve

fireogfirsindstyve+seks = halfemsindstyve

seksogtresindstyve+niden = femogfirsindstyve

femden+femogtresindstyve = firsindstyve

treden+*A* = niogtyve

seks·ni = *B*

niogtresindstyve+fireogtyve = *C*

Liga komputerowo-kalkulatorowa

Zad. 1. Uzyskaj na wyświetlaczu liczbę 1001, używając jedynie klawiszy 2, 7, ×, – i = i, naciskając je w sumie najwyżej dziewięć razy.

Zad. 2. Jaka jest reszta z dzielenia liczby 123456789987654321 przez 1234?

Zad. 3. Pierwszym elementem pewnego ciągu liczb jest 1. Każdy dalszy element tego ciągu to suma trójki oraz iloczynu liczby 2 i poprzedniego elementu. Jaki jest dwudziesty szósty element tego ciągu?

Zad. 1. Podaj działanie, którego wykonanie przez wyszukiwarkę google wymaga pięciokrotnego naciśnięcia dowolnie wybranych klawiszy (nie licząc naciśnięcia klawisza Enter w celu obliczenia wyniku), o możliwie największym wyniku.

Zad. 2. Ile jest mniej więcej ziaren piasku na polskich plażach Bałtyku? Podaj przyjęte wielkości.

Zad. 3. Ile liczb całkowitych spełnia nierówność$(½)^x < 1–2009x$?

Liga z matematyki finansowej

Poziom SP

Zad. 1. W ofercie hurtowni „U Wiewióry", prowadzonej przez pana Edwarda Wiewiórę, znajdujemy orzechy laskowe w cenie 6 zł za półkilogramowe opakowanie plus 5% VAT. Jaka jest cena brutto kilograma tych orzechów w hurtowni?

Zad. 2. Pani Kowalska kupiła wczoraj w sklepie „U Kominka", prowadzonym przez pana Bogdana Kominka, 5 m^3 drewna opałowego, na które obowiązuje 8-procentowa stawka VAT, i zapłaciła 1080 zł. Ile podatku VAT ze sprzedaży drewna opałowego musi pan Kominek odprowadzić do urzędu skarbowego, jeśli w styczniu sprzedał 100 m^3 tego drewna?

Zad. 3. W roku 2010 sprzęt komputerowy był obłożony 22-procentową stawką VAT, a w 2011 roku stawka VAT rośnie do 23%. Ile powinna kosztować w styczniu 2011 w sklepie „U Kota", prowadzonym przez pana Jana Kota, bezprzewodowa mysz komputerowa, której cena brutto w grudniu 2010 roku wynosiła 122 zł?

Poziom GM

Zad. 1. Na wyroby spożywcze obowiązują różne stawki VAT, w zależności od rodzaju produktów. Są one podane na każdym paragonie, który otrzymujesz, robiąc zakupy. Pani Kowalska kupiła wczoraj w osiedlowym centrum handlowym „U Sąsiadki", prowadzonym przez pana Roberta Sąsiadkę, herbatę za 13,62 zł, kawę cappuccino za 8,56 zł i sześciopak wody mineralnej za 13,65 zł. Ponadto kupiła 5 słoiczków ćwikły z chrzanem łącznie za 10,42 zł, przyprawę do zup za 18,10 zł, majonez za 4,25 zł, polędwicę wieprzową za 26,53 zł i kiełbasę drobiową za 19,86 zł. Na koniec dołożyła do koszyka trzy papryki łącznie za 9,75 zł, brokuł za 4,40 zł i opakowanie jaj za 5,03 zł. Na napoje obowiązuje 23-procentowa stawka VAT, na żywność nieprzetworzoną, mięso i wędliny – 5%, a na pozostałe produkty z koszyka pani Kowalskiej – 8%. Ile podatku VAT zarobił budżet państwa na zakupach pani Kowalskiej?

Zad. 2. W 2010 roku na wyroby wędliniarskie obowiązywał 7-procentowy VAT, ale obecnie wędliny przeniesiono do grupy towarów o niższej stawce podatkowej (5%). Ile powinien kosztować dziś w sklepie „U Myśliwego", prowadzonym przez pana Franciszka Myśliwego, kilogram kiełbasy wędzonej z dzika, której cena brutto w grudniu 2010 roku wynosiła 25,68 zł?

Zad. 3. Czy wzrost podatku VAT z 22% na 23% oznacza wzrost ceny brutto produktu o 1%? Uzasadnij odpowiedź.

Poziom LO

Zad. 1. W 2010 roku na wyroby bednarskie z drewna obowiązywał 7-procentowy VAT. Ile kosztowała w grudniu w sklepie „U Bednarza", prowadzonym przez pana Roberta Bednarza, dębowa beczka o pojemności 100 l, jeśli zmiana stawki podatku na 8% spowodowała wzrost jej ceny brutto o 5,50 zł?

Zad. 2. Jaki procent ceny brutto produktu stanowi podatek VAT dla towarów, na które obowiązują stawki VAT równe odpowiednio 5%, 8% i 23%?

Zad. 3. O ile procent wzrosła cena netto, a o ile – cena brutto towarów obłożonych w 2010 roku 22-procentową stawką VAT, a w 2011 roku – 23-procentową stawką VAT?

4. Mecz matematyczny

Małgorzata Mikołajczyk, Wrocław

W artykule prezentujemy genezę meczów matematycznych i sposób ich pojawienia się w historii matematyki, a także to, jak wykorzystać je jako narzędzie kształcenia umiejętności matematycznych i społecznych uczniów. Zamieszczamy też przykładowy regulamin rozgrywki meczowej oraz zestawy zadań meczowych dla różnych poziomów nauczania.

Mecze matematyczne dawniej i dziś

Mecze matematyczne były popularną formą prezentacji dorobku naukowego matematyków w XVI-wiecznej Europie, gdy nie było jeszcze czasopism naukowych (była to jednocześnie forma publicznego ogłaszania wyników swoich badań oraz zdobywania dla nich sponsorów). Mecze takie polegały na publicznym wzajemnym przekazaniu sobie nawzajem przez zawodników określonej liczby problemów oraz umówieniu się na następne spotkanie, na którym każdy przedstawiał rozwiązania zadań przeciwnika. Zwycięzcą zostawał ten, kto zrobił ich więcej, a nagrodą był obiad fundowany przez przegranego dla tylu przyjaciół zwycięzcy, ile wynosiła różnica liczby rozwiązanych przez nich zadań. Obecnie mecze matematyczne są popularną formą zawodów zespołowych rozgrywanych między klasami lub reprezentacjami zaprzyjaźnionych szkół oraz uczestnikami kółek lub obozów matematycznych.

Dolnośląskie Mecze Matematyczne

Na Dolnym Śląsku i Opolszczyźnie oraz w przyległych powiatach Wielkopolski od 2001 roku rozgrywane są między szkołami Dolnośląskie Mecze Matematyczne. Trwają przez cały rok szkolny i odbywają się systemem grupowym aż do wyłonienia zwycięzcy. Uczestniczy w nich każdorazowo około 2,5 tysiąca uczniów ze 150 szkół. W pierwszym semestrze roku szkolnego odbywa się runda eliminacyjna, szkoły grają w grupach po cztery, systemem „każdy z każdym", odwiedzając się nawzajem. Zwycięskie drużyny przechodzą do rundy półfinałowej, rozgrywanej w drugim semestrze w podobny sposób. W maju wszyscy uczestnicy meczów spotykają się podczas finałów w poszczególnych kategoriach (szkoły podstawowe, gimnazja, szkoły ponadgimnazjalne), a w czerwcu najlepsi zawodnicy ze wszystkich szkół biorą udział w obozie naukowym.

Szkoły, które odpadają z rozgrywek na etapie eliminacji, często organizują rozgrywki wewnątrz- lub międzyszkolne z wykorzystaniem zadań z dalszych etapów, które są udostępniane w internecie. Zadania przygotowują studenci i pracownicy Uniwersytetu Wrocławskiego. Główną nagrodą jest puchar Fundacji Matematyków Wrocławskich oraz udział w matematycznej wycieczce albo spektaklu teatru studenckiego. Szkoły finałowe otrzymują pomoce dydaktyczne do matematyki i prenumeratę czasopism. Więcej informacji można znaleźć na stronie internetowej www.fmw.uni.wroc.pl, zakładka: Dla ucznia > Mecze matematyczne.

Czym jest mecz matematyczny?

Co odróżnia mecze od innych konkursów matematycznych? Jest to turniej zespołowy, podczas którego drużyny otrzymują jednakowe zestawy zadań, a po ustalonym czasie spotykają się i zadają sobie nawzajem zadania z tego zestawu do rozwiązania przy tablicy przez jednego z zawodników. Nie chodzi tu o samą odpowiedź. Do każdego zadania musi być podane pełne i szczegółowo uzasadnione rozwiązanie, w przeciwnym razie przeciwnicy od razu wskażą luki w rozumowaniu, jury obniży ocenę, z której część punktów może przejąć drużyna przeciwna. Nie wystarczy więc umieć zadanie rozwiązać, liczy się także sztuka prezentacji i argumentowania. Trzeba też uważnie śledzić rozumowanie przeciwnika. Zadania meczowe muszą być specyficzne. Powinny rozwijać umiejętności wnioskowania dedukcyjnego i argumentowania, tak rzadko obecne w praktyce nauczania w dobie powszechności konkursów i egzaminów testowych.

Forma meczu ma ogromne walory edukacyjne. Podczas rozgrywki uczniowie nie tylko „ścigają się", ale i wiele uczą się od siebie nawzajem i to w różnych fazach meczu. Po raz pierwszy, gdy wspólnie pracują nad zadaniami, konsultują swoje pomysły z kapitanem, nawzajem analizują swoje rozwiązania, próbując wychwycić błędy i niejasności oraz uzupełnić luki. Po raz drugi – podczas rozgrywki, gdy obserwują przy tablicy przeciwników i dyskutują z nimi oraz jurorami o przedstawionym rozwiązaniu. Po raz trzeci uczą się od jurorów, studentów lub nauczycieli, którzy podczas oceny rozwiązania omawiają zauważone błędy i usterki (aby nie przedłużać rozgrywki nie przedstawia się wtedy na ogół poprawnych rozwiązań zadań, które nie zostały rozwiązane przez uczniów). I wreszcie po raz czwarty – w szkole, kiedy z własnym nauczycielem jeszcze raz omawiają meczowe zadania i ich poprawne rozwiązania oraz analizują przyjętą strategię rozgrywki.

Taka forma konkursu jest bardzo atrakcyjna zarówno dla zawodników jak i kibiców, bo angażuje ich emocjonalnie. Zwycięstwo zależy nie tylko od wiedzy matematycznej, ale w znacznej mierze także od przyjętej strategii rozgrywki. Takie zawody uczą też współpracy w grupie (dyskusja z kolegami pozwala niejednokrotnie wpaść na pomysł rozwiązania lub ulepszyć już znalezione) oraz samodzielnego i odpowiedzialnego podejmowania decyzji, bez możliwości ich akceptacji przez nauczyciela.

Regulamin meczu

Poniżej przedstawiamy przykładowy regulamin meczu matematycznego, który wielokrotnie się sprawdził w praktyce w meczach międzyszkolnych i międzyklasowych. Jednak w zależności od specyfiki sytuacji dydaktycznej można poddawać go rozmaitym modyfikacjom.

1. W meczu biorą udział dwie drużyny 10-osobowe. Na czele każdej drużyny stoi kapitan.
2. Na godzinę przed rozpoczęciem rozgrywki kapitanowie otrzymują jednakowe zestawy 10 zadań oraz losują, która drużyna rozpocznie grę (tzn. jako pierwsza wskaże zadanie dla drużyny przeciwnej).
3. Przez godzinę drużyny rozwiązują zadania bez kontaktu z innymi uczniami i nauczycielami. Mogą korzystać z tablic i kalkulatorów, jednak podczas meczu należy uzasadnić niestandardowe fakty, z których się korzysta, i uzasadnić poprawność kroków rozumowania wykorzystujących metody numeryczne lub graficzne.
4. Nad prawidłowością przebiegu meczu czuwa jury, które rozstrzyga wszystkie kwestie sporne. Decyzje jury są ostateczne.

5. W skład jury wchodzi po jednym nauczycielu matematyki z każdej ze stron i ewentualnie przedstawiciel niezależny (nauczyciel z innej szkoły, uczeń ze szkoły wyższego poziomu, student matematyki lub pracownik uczelni).
6. Podczas rozgrywki drużyny zadają sobie nawzajem zadania na przemian. Mecz kończy się po rozwiązaniu 8 spośród 10 zadań z listy.
7. Drużyna, której zadano zadanie, może je przyjąć lub odbić. Jeżeli zadanie zostanie odbite, rozwiązuje je drużyna, która je zadała.
8. Rozwiązanie każdego zadania przedstawia na tablicy inny z zawodników.
9. Podczas prezentacji zawodnik nie może się kontaktować z drużyną, nauczycielem ani publicznością.
10. Po zakończeniu prezentacji rozwiązania kapitan drużyny, która je przedstawiała, ma prawo pierwszy je uzupełnić. Potem zabiera głos kapitan drużyny przeciwnej. Może zgłaszać uwagi, zastrzeżenia, komentarze, prosić o dodatkowe wyjaśnienia, przedstawić uproszczenie rozwiązania itp. Dodatkowe pytania mogą też zadawać jurorzy.
11. Po zakończeniu dyskusji jury ocenia oryginalne rozwiązanie (bez uwag kapitana i uzupełnień) w skali 0–10. Za zadanie zaklasyfikowane jako „nierozwiązane” można przyznać 0–5 punktów, a za zadanie rozwiązane 6–10 punktów. Każdy z członków jury podaje swoją ocenę będącą liczbą całkowitą, po czym oblicza się średnią.
12. Drużyna, która rozwiązywała zadanie podane przez przeciwników, otrzymuje tyle punktów, ile wynosiła ocena jej rozwiązania. W przypadku zadania odbitego liczba punktów przyznanych za rozwiązanie obliczana jest według wzoru $n = 2p-10$, gdzie p jest oceną zadania podaną przez jury.
13. W przypadku zadania uznanego za rozwiązane, ale nie bezbłędnie, dodatkowe punkty za wskazanie usterek może otrzymać drużyna zadająca zadanie. Następuje wtedy przejęcie punktów. Powinno ono być stosowane tylko w przypadku wskazania istotnych uchybień i nie może przekroczyć liczby punktów odjętych drużynie prezentującej zadanie.

Uwagi praktyczne

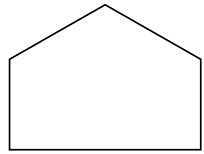
Zadania w zestawie meczowym mogą być dobrane tematycznie lub przekrojowo. W tym drugim przypadku dobrze, żeby dotyczyły wielu różnych działów, uwzględniając szeroki wachlarz tematów i metod rozwiązania. W zestawach DMM zawsze jest zadanie łamigłówkowe, arytmetyczne oraz z geometrii płaskiej i przestrzennej, a w starszych kategoriach – zadanie z równań, nauki o funkcjach i probabilistyki. Ważne jest, żeby zadania miały zróżnicowany stopień trudności, na przykład w zestawie 10 zadań zawsze trzy są łatwe, trzy – średnie i trzy – trudne. To sprawia, że dużą rolę zaczyna odgrywać strategia rozgrywki, a nie tylko liczba zadań, które drużyna potrafi rozwiązać.

Dolnośląskie mecze (poza finałowymi) sędziują nauczyciele obu drużyn. Na początku jest to trudne, by „na gorąco” decydować o ocenie zaprezentowanego zadania, nawet jeśli zna się jego rozwiązanie (szkice dostarczają organizatorzy) i wstępnie się przemyślało możliwe do popełnienia błędy i odpowiadające im reakcje jury. Uczniowie potrafią wymyślać zupełnie nieprzewidywalne scenariusze. Ważne jest, by ocenianie odbywało się w czasie zaniedbywalnym w stosunku do prezentacji rozwiązania. Dlatego po kilku latach eksperymentowania zrezygnowaliśmy z osiągania konsensusu przez jurorów na rzecz wyciągania średniej arytmetycznej z ich ocen. Zdarzało się bowiem, że dyskusje jurorów nad odjęciem pojedynczego punktu trwały w nieskończoność i były bardzo emocjonalne. W obecnej wersji regulaminu juror, który podał niższą ocenę, wyjaśnia, za jakie błędy odjęto punkty. Pewne usterki można wtedy wytknąć, ale nie muszą one obniżać oceny (przejęzyczenia, niestandardowa lub niekonsekwentna notacja, błędy językowe, terminologiczne itp.). Kolejna zasada jest taka, że nawet jeśli uczeń poda poprawną odpowiedź, ale nie objaśni sposobu jej uzyskania, dostaje tylko 2 punkty. Rozwiązanie zadania polega bowiem na prezentacji procesu myślowego, a nie samego wyniku (zwłaszcza uczniowie SP przyzwyczajeni do zadań testowych mają na początku trudności ze zrozumieniem tej zasady). Inna ważna reguła: rozwiązać zadanie to znaczy podać wszystkie obiekty, które spełniają warunki zadania, i uzasadnić, że innych nie ma. Zatem odgadnięcie odpowiedzi i sprawdzenie, że spełnia warunki zadania, nie jest rozwiązaniem (nawet jeśli uzyskana odpowiedź jest jedyna). Trzeba wskazać drogę dojścia do tej jedynej odpowiedzi, która jednocześnie wykazuje, że innych możliwości nie ma. Opanowanie tej zasady również zabiera, zwłaszcza młodszym uczniom, trochę czasu. Ponadto za rozwiązania merytorycznie poprawne, ale żmudne, sprawdzane „na palcach" i nieefektywne, na przykład za niepotrzebne sprawdzanie wielu przypadków, które dałoby się wyeliminować jednym argumentem, odejmujemy 2 punkty. Jeśli nieefektywność rozwiązania wskaże drużyna przeciwna, otrzymuje te punkty w ramach „przejęcia". Na ogół jednak rolą przeciwnika jest wskazanie usterek, błędów i luk w zaprezentowanym rozwiązaniu, a nie pokazanie innego sposobu rozwiązania.

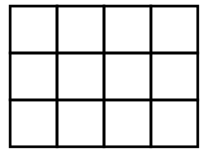
Duże obawy uczniów (co jest zrozumiałe), ale i nauczycieli (co jest zupełnie nieuzasadnione) budzi konieczność rozegrania meczu ze szkołą o znacznie wyższym poziomie umiejętności matematycznych uczniów. To nic, że wynik takiego meczu zazwyczaj z góry jest przesądzony. Należy jednak pamiętać, że nauczyciele z takich szkół (a jest to chyba regułą we wszystkich szkołach) są znacznie bardziej wymagający w stosunku do własnych uczniów. Zaletą takich spotkań jest przede wszystkim to, że uczniowie słabsi bardzo dużo się uczą od swoich lepszych kolegów, znacznie więcej niż od uczniów na zbliżonym do nich poziomie. Łatwiej im przejąć pewne postawy od rówieśników niż od nauczyciela, który mówi im o tym nawet dziesiątki razy. Łatwiej zrozumieć argumentację rówieśnika podaną inaczej niż przez własnego nauczyciela, który wielokrotnie tłumaczy to samo, ale i zawsze tak samo. Z doświadczenia wiem, że w podobnych sytuacjach nauczyciele słabszych drużyn ze zdziwieniem stwierdzali, że po takim meczu „nie poznawali własnych uczniów", ponieważ w kolejnych meczach wydawali się o wiele dojrzalsi matematycznie.

Zestaw meczowy dla szkoły podstawowej

1. Na ile trójkątów rozpadnie się stukąt rozcięty wzdłuż przekątnych wychodzących z jednego wierzchołka?
2. Czy istnieje liczba dodatnia podzielna przez każdą z liczb 1, 2, 3, ..., 2013?
3. Basia i Marek powiedzieli mamie na ucho wybrane przez siebie liczby naturalne, mama głośno powiedziała, ile wynosi ich iloczyn. Basia wiedziała, jaką liczbę powiedział Marek, ale on nie wiedział, co powiedziała Basia, mimo że jest dobrym matematykiem. Jak to możliwe?
4. W pewnym kraju do szkół uczęszcza 20 milionów uczniów, z czego 20% to uczniowie szkół podstawowych. Każdy uczeń podstawówki otrzymuje podręcznik do matematyki za 30 $, zestaw książek do angielskiego za 70 $ i książkę do przyrody za 40 $. Ile pieniędzy musi wydać ministerstwo oświaty na te podręczniki?
5. Ile różnych ciężarów można zważyć na wadze szalkowej, mając do dyspozycji trzy odważniki: 1 kg, 3 kg i 9 kg?
6. Jaką resztę daje przy dzieleniu przez 5 liczba 987654321^{2013}?



7. Pokój na poddaszu o wymiarach 4 m × 4 m ma spadzisty sufit (patrz rysunek). W najniższym miejscu jego wysokość wynosi metr, a w najwyższym – 2 m. Jaką objętość ma ten pokój?
8. Udowodnij, że wśród dowolnych trzech liczb naturalnych da się znaleźć dwie takie, że ich różnica dzieli się przez 2.
9. Ile czasu w ciągu doby obie wskazówki spędzają jednocześnie między liczbami 2 i 3 na tarczy zegara?
10. Ile kwadratów jest na tym rysunku?



Szkice rozwiązań

1. Trójkątów tych będzie 98 – o jeden więcej niż przekątnych wychodzących z tego wierzchołka, których jest 97, ponieważ łączą one ten wierzchołek z każdym innym wierzchołkiem stukąta oprócz dwóch sąsiednich i niego samego.
2. Taką liczbą jest na przykład iloczyn 2·3·4·...·2013.
3. Jeśli Marek nie wiedział, co powiedziała Basia, to znaczy, że jego liczba pomnożona przez co najmniej dwie różne liczby daje ten sam iloczyn. Zatem powiedział zero. Basia mogła powiedzieć dowolną liczbę poza zerem, ponieważ tylko iloczyn przez zero różnej od zera liczby daje zero. Zera nie mogła powiedzieć, bo z podanych wyżej powodów nie wiedziałaby, jaka była liczba Marka.
4. Podstawówkowiczów jest 4 mln, a koszt zestawu podręczników dla jednego ucznia wynosi 140 \$, więc ministerstwo musi wydać 560.000.000 \$.
5. Możemy odważyć następujące 13 ciężarów (w kilogramach): 9+3+1, 9–3+1, 9+3–1, 9–3–1, 9+3, 9–3, 9+1, 9–1, 3+1, 3–1, 9, 3, 1. Branie liczby z plusem odpowiada postawieniu odpowiedniego odważnika na jedną szalkę, a z minusem – na drugą.
6. Z zasad mnożenia pisemnego wynika, że ostatnią cyfrą tej potęgi jest jedynka, zatem szukana reszta wynosi 1.
7. „Rozkrajając" pokój jego płaszczyzną symetrii wzdłuż szczytowej krawędzi sufitu i zestawiając odpowiednio otrzymane połowy, można zauważyć, że jego objętość równa się objętości prostopadłościanu o wymiarach 2 m × 4 m × 3 m, czyli wynosi 24 m^3.
8. Wśród trzech liczb naturalnych co najmniej dwie są nieparzyste lub co najmniej dwie są parzyste. W obu tych przypadkach mamy więc dwie liczby, których różnica jest podzielna przez 2.
9. Wskazówka godzinowa jest między 2 a 3 przez 2 godziny (między $2^{\underline{00}}$ a $3^{\underline{00}}$ i między $14^{\underline{00}}$ a $15^{\underline{00}}$). W tym czasie wskazówka minutowa znajduje się w tej samej części tarczy przez 10 minut – między $2^{\underline{05}}$ a $2^{\underline{10}}$ i między $14^{\underline{05}}$ a $14^{\underline{10}}$.
10. Kwadratów jednokratkowych jest 12, dwukratkowych – 6 (na tyle sposobów można wybrać jedną kratkę jako lewą górną dla tego kwadratu), trzykratkowych – 2, czyli wszystkich jest 20.

Zestaw meczowy dla gimnazjum

1. W ubiegłym roku w mieście Toster odbył się jubileuszowy XX Festiwal Trzech Tenorów. W bieżącym roku odbędzie się on w Roster, a za rok w Gloster. Potem jego organizowanie będzie cyklicznie kontynuowane w każdym z tych miast na zmianę, tak jak działo się to wcześniej. Przez ile lat XXI wieku organizatorem festiwalu nie będzie Gloster?

2. Czy kasjer może wydać resztę 20 zł siedmioma monetami, z których każda ma wartość 1 zł lub 5 zł?
3. Czy w zbiorze trójkątów prostokątnych o przeciwprostokątnej 2013 istnieją trójkąty o dowolnie dużym polu?
4. Dowolna liczba naturalna o dwucyfrowej końcówce k jest podzielna przez k. Dla jakich k to zdanie jest prawdziwe?
5. Dla jakich liczb całkowitych a i b prawdziwa jest równość: $(a+b)^2 = a^2+ab+4b^2$?
6. Jakie wielokąty foremne mają tę własność, że spośród ich wierzchołków można wybrać trzy będące wierzchołkami trójkąta prostokątnego?
7. Zespół pracowników ma wykonać pewną pracę w ciągu określonej liczby godzin. Gdyby pracowników było o 4 więcej, wykonywaliby tę samą pracę o 2 godziny krócej, a gdyby pracowników było o 3 mniej, pracowaliby o 5 godzin dłużej. Ilu było pracowników i ile godzin mieli pracować?
8. Wyznacz x i y, mając dane NWW $(x, y) = 2275$ i NWD$(x, y) = 13$.
9. Obwód rombu wynosi 48 cm, a suma długości jego przekątnych jest równa 26 cm. Jakie jest pole rombu?
10. Ostrosłup prawidłowy sześciokątny przecięto płaszczyzną, która przecina wszystkie krawędzie boczne. Punkty przecięć połączono odcinkami co trzeci. Uzasadnij, że te odcinki mają punkt wspólny.

Szkice rozwiązań

1. Wiek XXI to lata 2001–2100. Gloster organizuje festiwal w latach, których numery dają z dzielenia przez 3 resztę 1, więc zaczyna w 2002, a kończy 2098 (stosujemy cechę podzielności przez 3). Zatem festiwali w Gloster jest (2098–2002):3+1 = 33. Pozostałych festiwali będzie 67.
2. Nie może, gdyż suma siedmiu liczb nieparzystych jest nieparzysta.
3. Nie istnieją. Przyprostokątne są krótsze, a połowa ich iloczynu stanowi pole. Jest więc ono ograniczone z góry liczbą ½·2013·2013, nie może więc być dowolnie duże.
4. Zapiszmy liczbę o dwucyfrowej końcówce $\underline{AB}$ jako $100C + \underline{AB}$, gdzie C jest liczbą naturalną, a A i B są jednocyfrowe. Ponieważ pierwszy składnik dzieli się przez 100, cała liczba będzie dzieliła się przez 100 wtedy i tylko wtedy, gdy drugi składnik, czyli dwucyfrowa końcówka, będzie się dzielił przez 100. To samo jest prawdziwe dla wszystkich dzielników liczby 100. Zatem podana cecha jest cechą podzielności (czyli warunkiem równoważnym podzielności) dla liczb k równych: 01, 02, 04, 05, 10, 20, 25, 50, 100.
5. Wykonując mnożenie $(a+b)(a+b)$, można sprawdzić, że dla dowolnych a i b zachodzi równość $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Zatem szukamy liczb a i b spełniających $a^2+2ab+b^2 = a^2+ab+4b^2$ lub równoważnie $ab = 3b^2$. Warunek ten jest spełniony dla $b = 0$ i dowolnego a całkowitego oraz dla $a = 3b$, czyli dowolnego b całkowitego różnego od zera i a stanowiącego trzykrotność tej liczby.
6. Wpiszmy wielokąt foremny w okrąg. Istnienie trzech wierzchołków tworzących trójkąt prostokątny oznacza, że tworzą one kąt wpisany oparty na średnicy (na mocy twierdzenie <u>odwrotnego</u> do twierdzenia o kącie wpisanym opartym na średnicy). Średnica łączy 2 wierzchołki wielokąta foremnego tylko w parzystokątach.
7. Załóżmy, że x pracowników ma pracować przez h godzin. Zakładamy też, że każdy pracownik ma taką samą wydajność pracy jak inni i nie zmienia się ona przez cały czas. Z warunków zadania wiemy, że: $(x+4)(h-2) = (x-3)(h+5) = xh$, co daje równoważny układ równań: $4h-2x = 8$ i $5x-3h = 12$, spełniony przez $x = 6$ i $h = 5$.
8. Wiemy, że $x = 13n$ i $y = 13k$, gdzie n i k są względnie pierwsze. Ponadto z własności NWW i NWD wynika, że $xy = \text{NWW}(x, y)\cdot\text{NWD}(x, y)$, zatem $169kn = 2275\cdot13$. Stąd $kn = 175 = 5\cdot5\cdot7$. Możliwe pary (k, n)

z dokładnością do kolejności to (1, 175) i (7, 25). Stąd możliwe pary (x, y) z dokładnością do kolejności to (13, 2275) oraz (91, 325).

9. Niech d i e oznaczają długości połówek przekątnych rombu. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $d^2+e^2 = 12^2 = 144$. Natomiast $d+e = 13$, czyli $(d+e)^2 = 169$. Wiemy, że $(d+e)^2 = d^2+e^2 + 2de = 144+2de = 169$, skąd $2de = 25$. Pole rombu to $2d{\cdot}2e$, czyli 50.
10. Niech $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_6$ to punkty przecięcia płaszczyzny tnącej z kolejnymi krawędziami bocznymi ostrosłupa, a O to wierzchołek. Łączymy odcinkami A_1 z A_4, A_2 z A_5 i A_3 z A_6. Zauważmy, że przecięcie odcinków A_1A_4 i A_2A_5 leży w przecięciu płaszczyzn OA_1A_4 i OA_2A_5. Każda z tych płaszczyzn zawiera wysokość ostrosłupa (bo zawiera jego przeciwległe krawędzie boczne), czyli wysokość jest wspólną prostą tych dwóch płaszczyzn, zawiera więc także punkt przecięcia odcinków A_1A_4 i A_2A_5. Analogicznie na prostej zawierającej wysokość leżą przecięcia pozostałych par odcinków. Ta prosta przecina płaszczyznę przekroju w jednym punkcie i to jest właśnie punkt wspólny odcinków.

Zestaw meczowy dla szkoły ponadgimnazjalnej

1. Dwie liczby dwucyfrowe różnią się o 5, są podzielne przez 5, ich suma podniesiona do kwadratu jest liczbą, którą otrzymamy, pisząc te liczby obok siebie. Jakie to liczby?
2. Czy w zbiorze trójkątów prostokątnych o przeciwprostokątnej długości 2013 istnieją trójkąty o dowolnie małym polu?
3. Jaki warunek muszą spełniać długości ramion trapezu o podstawach długości 12 i 17, aby taki trapez istniał?
4. W urnie jest 10 kul z kolejnymi numerami od 13 do 22. Losujemy jedną kulę. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że wylosowana kula ma numer podzielny przez n. Czy wynika stąd, że $P(4) > P(5)$?
5. Ile zer jest w zapisie dziesiętnym liczby utworzonej z kolejno napisanych dodatnich liczb parzystych nie większych od 2013?
6. Jaka jest objętość figury utworzonej ze wszystkich punktów leżących w odległości mniejszej niż 1 od graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o wszystkich krawędziach długości 2?
7. W pewnym powiecie jest 5 miast: A, B, C, D, E. Odległości między nimi wynoszą: $AB = 30$ km, $BE = 80$ km, $ED = 20$ km, $CD = 65$ km, $AD = 110$ km, $BC = 15$ km. Jaka jest odległość między miastami A i E?
8. Na rajskiej jabłoni rosną ananasy i banany. Za jednym razem można z niej zerwać dwa owoce. Jeśli zerwiemy dwa jednakowe owoce, to wyrośnie nowy ananas, a jeśli zerwiemy różne owoce, to wyrośnie nowy banan. Adam i Ewa wielokrotnie zrywali owoce z jabłoni, aż pozostał na niej tylko jeden owoc. Jaki?
9. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Na przedłużeniu boku AC poza punkt C wybrano punkt D, a na przedłużeniu boku BC poza punkt C wybrano E, taki że $BD = DE$. Udowodnij, że $AD = CE$.
10. Oblicz: $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$.

Szkice rozwiązań

1. Liczby te można zapisać jako $10n$ i $10n\pm5$. Kwadrat ich sumy to zatem $400n^2\pm200n+25$. Ostatnie dwie cyfry tej liczby to 25, zatem wyjściowymi liczbami mogły być 20 i 25 lub 30 i 25. Bezpośrednio sprawdzając, dowiadujemy się, że obie te pary spełniają warunki zadania.

2. Tak. Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o kącie wpisanym opartym na średnicy trójkąty takie można wpisać w okrąg o promieniu 1005, tak że przeciwprostokątna pokryje się ze średnicą. Wówczas przesuwając wierzchołek kąta prostego coraz bliżej jednego z końców tej średnicy, otrzymujemy trójkąty o polach dowolnie bliskich 0 (ich wysokość jest dowolnie bliska 0, a podstawa, na którą ją opuszczamy, ma stałą długość).
3. Niech długości ramion trapezu wynoszą a i b. Na to, żeby taki trapez, istniał potrzeba i wystarcza, aby istniał trójkąt o bokach a, b i 5. Taki trójkąt powstaje między ramionami trapezu po przesunięciu równoległym jednego z nich, tak aby przechodziło przez drugi koniec podstawy o długości 12 niż ten koniec, przez który przechodziło oryginalnie. Muszą więc zachodzić jednocześnie nierówności: $a+5 > b$, $b+5 > a$ i $a+b > 5$.
4. Wśród możliwych wyników są dwa podzielne przez 4 i dwa podzielne przez 5, więc dane prawdopodobieństwa są równe.
5. Policzmy najpierw zera w liczbie kończącej się na 1990: zerem jest ostatnia cyfra co piątej liczby, zero jako cyfrę dziesiątek ma $19\cdot5$ liczb (o początku od „1" do „19" i dowolnej parzystej ostatniej cyfrze), zero jako cyfrę setek ma 50 liczb (o pierwszej cyfrze 1 i dowolnej dwucyfrowej końcówce). Poza tym mamy jeszcze zera w końcówce „2000200220042006200820102012" – jest ich 13, czyli w sumie $199+95+50+13 = 357$.
6. Figurę taką można rozciąć i złożyć w cztery walce o wysokości 2 i promieniu podstawy 1, kulę o promieniu 1, sześć prostopadłościanów $2\times2\times1$ oraz dwa graniastosłupy sześciokątne o krawędzi podstawy 2 i wysokości 1. Szukana objętość to zatem $4\cdot2\pi+\frac{4}{3}\pi+6\cdot4+2\cdot6\sqrt{3} = 24+\frac{28}{3}\pi+12\sqrt{3}$.
7. Na mocy nierówności trójkąta punkty A, B, C, D leżą w tej kolejności na jednej prostej. Z twierdzenia kosinusów wyznaczamy miarę kąta DBE, która wynosi: $400 = 6400+6400-2\cdot6400\cos\angle DBE$, czyli $\cos\angle DBE = 31/32$. Jednocześnie $AE^2 = 900+6400-2\cdot2400\cos\angle ABE = 100(73+2\cdot24\cdot\cos\angle DBE) = 100\cdot239/2$, więc odpowiedzią jest $10\sqrt{\frac{239}{2}} = 5\sqrt{478}$.
8. Po zerwaniu jakichkolwiek dwóch owoców, jest zachowany typ parzystości liczby bananów na drzewie. Zatem jeśli na początku liczba bananów była parzysta, to został ananas, a jeśli nieparzysta, to banan.
9. Na odcinku CE wybieramy taki punkt F, że $EF = BC$. Trójkąty DEF i DBC są przystające (z cechy bkb), więc kąty DFE i DCB mają po 120°, a kąty DFC i DCF po 60°. Wobec tego trójkąt CDF jest równoboczny i zachodzi: $AD = AC+CD = BC+CF = CF+FE = CE$.
10. Przekształćmy odjemną, korzystając ze wzoru na zamianę podstaw: $2^{\log_3 5} = 2^{\frac{\log_2 5}{\log_2 3}} = (2^{\log_2 5})^{\log_3 2} = 5^{\log_3 2}$. Otrzymaliśmy odjemnik, więc szukana liczba to 0.

5. Konkursy matematyczne

Kinga Gałązka, Łódź

Nauczyciele są ostatnio zasypywani ofertami zachęcającymi do startu ich uczniów w różnych konkursach. Ze względu na priorytety polityki edukacyjnej UE najbardziej popularne są konkursy matematyczne i językowe. Wybór jest ogromny, choć z jakością bywa różnie. Gdzie szukać propozycji najbardziej wartościowych i najlepiej dostosowanych do możliwości i zainteresowań uczniów? Jak chronić uczniów zdolnych przed rozmienianiem się na drobne i poszukiwaniem często łatwego sukcesu w konkursach o niewielkiej wartości merytorycznej i dydaktycznej?

Celem tego artykułu jest chęć pomocy nauczycielom w zorientowaniu się w rodzajach konkursów matematycznych, w których mogą startować ich uczniowie. Chcemy też zaprezentować kilka rad dla osób, które się decydują na samodzielną organizację konkursu klasowego, szkolnego czy regionalnego.

Próbując dokonać przeglądu i wyboru konkursów, do startowania w których warto zachęcić uczniów zdolnych, skupiliśmy się na konkursach ogólnopolskich i renomowanych lub ciekawych z innych względów konkursach regionalnych (o otwartej formule lub godnych naśladowania w innych regionach). Zrezygnowaliśmy z konkursów masowych skierowanych do szerokiego grona (także przeciętnych) uczniów, konkursów komercyjnych oraz opisanych w innych miejscach tego poradnika.

Najpopularniejsze konkursy matematyczne skierowane do uczniów można podzielić na dwie kategorie: te, które dają dodatkowe uprawnienia przy przyjmowaniu do szkoły wyższego szczebla edukacyjnego, oraz te, które takich uprawnień nie dają, a uczeń startuje w nich dla sprawdzenia się i satysfakcji. Pamiętajmy jednak, że konkurs jest nie tylko formą sprawdzenia wiadomości już posiadanych. Startując w konkursach, uczniowie także wiele się uczą i rozwijają swoje matematyczne umiejętności.

Olimpiady przy wsparciu finansowym MEN

Aktem prawnym regulującym organizację olimpiad jest Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej i Sportu z 29 stycznia 2002 roku w sprawie organizacji oraz sposobu przeprowadzania konkursów, turniejów i olimpiad (Dziennik Ustaw z 2002 r. Nr 13 poz. 125 z późniejszymi zmianami). Dopuszcza on cztery rodzaje olimpiad:

- przedmiotowe – obejmują i poszerzają treści podstawy programowej z jednego przedmiotu,
- interdyscyplinarne – obejmują elementy treści podstaw programowych z różnych przedmiotów,
- tematyczne – są związane z konkretnym tematem z programu nauczania,
- z przedmiotów dodatkowych – obejmują wiedzę z przedmiotów nieobowiązkowych.

Zgodnie z tym rozporządzeniem olimpiady adresowane są do uczniów szkół ponadgimnazjalnych, w tym na ściśle określonych zasadach – dla uczniów gimnazjum. Ich laureaci i finaliści mają wpisane te osiągnięcia na świadectwie, mogą też korzystać z dodatkowych uprawnień przy ubieganiu się o przyjęcie do szkoły wyższego szczebla. Ponadto laureaci olimpiad przedmiotowych uzyskują najwyższą ocenę końcową z danego przedmiotu i zwolnienie z odpowiedniej części egzaminu zewnętrznego. Laureaci wszystkich typów olimpiad mogą ubiegać się o stypendium Ministra Edukacji Narodowej lub Prezesa Rady Ministrów.

Olimpiadę organizuje się jako trójstopniowe zawody o zasięgu ogólnopolskim, w których od uczestników wymagany jest następujący zakres i poziom wiedzy oraz umiejętności:

- w zawodach pierwszego stopnia – wystarczający do uzyskania oceny bardzo dobrej z przedmiotu,
- w zawodach drugiego stopnia – niezbędny do uzyskania oceny celującej z przedmiotu,
- w zawodach trzeciego stopnia – w zakresie wskazanym w programie olimpiady.

Olimpiady mogą być organizowane przez szkoły wyższe, placówki naukowe, stowarzyszenia zawodowe i inne podmioty prowadzące statutową działalność oświatową lub naukową.

W Polsce przy wsparciu finansowym MEN organizowane są trzy olimpiady związane z kształceniem matematycznym.

- **Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów** (www.omg.edu.pl), realizowana w ramach projektu współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego pn.: „Opracowanie i wdrożenie kompleksowego systemu pracy z uczniem zdolnym”– ma na celu jak najwcześniejsze wyławianie talentów matematycznych i przedłużenie czasu przygotowań do Olimpiady Matematycznej na okres nauki w gimnazjum. W zawodach mogą też uczestniczyć uczniowie szkół podstawowych, ale na tych samych zasadach, co gimnazjaliści, bez żadnej taryfy ulgowej. Wiedza potrzebna do rozwiązania zadań z tej olimpiady nie wykracza poza podstawę programową dla gimnazjów, ale wymagane jest jej niestandardowe wykorzystanie. W olimpiadzie gimnazjalnej startują uczniowie z większości szkół w kraju.
  Zawody pierwszego stopnia składają się z dwóch części: korespondencyjnej i testowej (ta druga odbywa się pod nadzorem w macierzystej szkole). Zawody stopnia drugiego i trzeciego są jednodniowe i polegają na rozwiązaniu pięciu zadań w ciągu trzech godzin. Wszyscy uczestnicy zawodów stopnia trzeciego uzyskują tytuł finalisty, a najlepsi – laureata. Laureaci są zwolnieni z matematycznej części egzaminu gimnazjalnego i mogą wybrać szkołę ponadgimnazjalną poza procedurą kwalifikacyjną.
- **Olimpiada Matematyczna** (www.om.edu.pl) – to prestiżowy sprawdzian umiejętności matematycznych uczniów, słabo podatny na zmiany programów nauczania, skierowany do matematycznych elit. Zadania olimpijskie są trudne, wymagają wiedzy i umiejętności znacznie wykraczających poza podstawę programową matematyki. Proces przygotowania ucznia do olimpiady jest żmudny, dlatego decyduje się nań niewielu uczniów i nauczycieli.
  W pierwszym etapie uczestnicy rozwiązują zadania w domu (w trzech seriach po cztery), a rozwiązania przesyłają raz w miesiącu do regionalnego komitetu organizacyjnego. Zawody stopnia drugiego i trzeciego są dwudniowe, każdego dnia uczniowie, pracując pod nadzorem, mają do rozwiązania po trzy zadania w ciągu pięciu godzin. Wszyscy uczestnicy zawodów stopnia trzeciego otrzymują tytuł finalisty, a osoby, które uzyskały co najmniej 60% możliwych do zdobycia punktów, tytuł laureata. Najlepsi mają okazję zmierzyć się z kolegami z innych państw podczas różnych zawodów międzynarodowych, m.in. Czesko-Polsko-Słowackich Zawodów Matematycznych, Zawodów Matematycznych Państw Bałtyckich „Baltic Way”, Środkowo-Europejskiej Olimpiady Matematycznej i Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej.
- **Olimpiada Lingwistyki Matematycznej** (www.fmw.uni.wroc.pl zakładka: Dla uczniów > Lingwistyka matematyczna) – to olimpiada interdyscyplinarna, wymagająca podstawowej wiedzy językoznawczej (z zakresu podstawy programowej gimnazjum) oraz znajomości matematycznych i informatycznych

technik dowodzenia i weryfikowania twierdzeń. W porównaniu z Olimpiadą Matematyczną są to zawody znacznie bardziej powszechne.
Pierwszy etap odbywa się pod nadzorem w macierzystej szkole, gdzie uczniowie rozwiązują cztery zadania w ciągu dwóch godzin. Zawody drugiego i trzeciego stopnia są jednodniowe i polegają na rozwiązaniu czterech zadań w ciągu czterech godzin. Wszyscy uczestnicy zawodów stopnia trzeciego otrzymują tytuł finalisty, a około 20% najlepszych zawodników – tytuł laureata. Zwycięska ósemka reprezentuje Polskę na Międzynarodowej Olimpiadzie Lingwistycznej, odnosząc co roku duże sukcesy.

Konkursy organizowane przez kuratorów oświaty

Są to konkursy popularne wśród uczniów. Zwycięstwo w nich nadaje laureatom uprawnienia w systemie egzaminacyjnym, tj. zwolnienie z egzaminów zewnętrznych oraz dodatkowe uprawnienia przy rekrutacji do szkół wyższego szczebla. Konkursy te są skierowane do uczniów wszystkich typów szkół, a udział w nich jest bezpłatny. Mogą mieć zasięg wojewódzki lub ponadwojewódzki.

Do organizowania takich konkursów obliguje kuratorów oświaty ustawa o systemie oświaty. Organizacja i sposób przeprowadzania tych konkursów są opisane w Rozporządzeniu Ministra Edukacji Narodowej i Sportu z dnia 29 stycznia 2002 r. w sprawie organizacji oraz sposobu przeprowadzania konkursów, turniejów i olimpiad. Z kolei uprawnienia laureatów są zawarte w Rozporządzeniu Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 kwietnia 2007 r. w sprawie oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy oraz przeprowadzania egzaminów i sprawdzianów w szkołach publicznych, a także w Rozporządzeniu Ministra Edukacji Narodowej i Sportu z dnia 20 lutego 2004 r. w sprawie warunków i trybu przyjmowania uczniów do szkół publicznych oraz przechodzenia z jednych typów szkół do innych. Warto się w wolnej chwili zapoznać z tymi aktami prawnymi.

Z wymienionych rozporządzeń wynika, że laureaci matematycznych konkursów przedmiotowych o zasięgu wojewódzkim w szkole podstawowej lub gimnazjum otrzymują z matematyki ocenę celującą i są zwolnieni ze sprawdzianu lub egzaminu tzn. otrzymują świadectwo z najwyższym możliwym wynikiem. Laureaci konkursów o zasięgu wojewódzkim i ponadwojewódzkim, których program obejmuje w całości lub poszerza treści podstawy programowej co najmniej jednego przedmiotu, są przyjmowani do wybranego gimnazjum lub szkoły ponadgimnazjalnej niezależnie od kryteriów zawartych w statucie tej szkoły.

Nagrodami w konkursach kuratoryjnych są na ogół książki i czasopisma popularnonaukowe, łamigłówki lub gry planszowe, rzadziej sprzęt elektroniczny. W wielu województwach laureaci konkursów mogą liczyć na opiekę ze strony uczelni wyższych, które zapraszają ich na indywidualne konsultacje i wybrane zajęcia ze studentami na prawach wolnego słuchacza. Bycie laureatem lub finalistą konkursu jest też często jednym z kryteriów branych pod uwagę przy ubieganiu się o stypendia naukowe.

Kurator oświaty najczęściej zleca zorganizowanie i przeprowadzenie konkursów podmiotom prowadzącym działalność edukacyjną, powołując wojewódzkie komisje konkursowe, określając ich zadania i zatwierdzając regulamin konkursu. Oznacza to, że zakres wymagań, poziom trudności zadań oraz kryteria zdobycia tytułu laureata w poszczególnych województwach mogą być zróżnicowane.

Konkursy kuratoryjne mają na ogół tradycyjną formę. Eliminacje zazwyczaj są testowe i polegają na rozwiązywaniu raczej szablonowych zadań o różnych stopniach trudności. W finale są preferowane zadania otwarte, które redaguje się z pełnym uzasadnieniem. Informacje o konkursach prowadzonych przez kuratorów oświaty lub inne podmioty na zlecenie i pod patronatem kuratorów oświaty można znaleźć na stronach internetowych kuratoriów w zakładkach „Dla ucznia" i „Dla rodzica". Tam też dostępne są regulaminy tych konkursów i przykładowe zadania lub pełne archiwa zadaniowe z wcześniejszych edycji. Poniżej prezentujemy kilka najbardziej znanych konkursów lokalnych.

- **Konkurs Matematyczny im. ks. Franciszka Jakóbczyka** (www.biskupiak.lublin.pl/liceum/jakobczyk-regulamin) jest organizowany przez XXI LO w Lublinie dla uczniów klas II i III gimnazjum. Jest jednoetapowy, otwarty dla wszystkich chętnych, a zadania mają formę różnego rodzaju testów.
- **Kujawsko-Pomorski Konkurs Matematyczny im. Stefana Banacha** (www.wkm.xlo.fr.pl) jest organizowany przez X LO w Toruniu i adresowany do uczniów klas I i II szkół ponadgimnazjalnych. Składa się z eliminacji szkolnych i finału, do którego przechodzi trzech najlepszych uczniów z każdej szkoły i wszyscy powyżej progu kwalifikacyjnego. Zadania należy podać wraz z uzasadnieniami.
- **Kujawsko-Pomorskie Zawody im. Mariana Rejewskiego** (www.1lo.bydgoszcz.pl/index2.php?art.= 255) są organizowane przez I LO w Bydgoszczy dla uczniów klas I i II szkół ponadgimnazjalnych i uzdolnionych gimnazjalistów. Konkurs składa się z eliminacji szkolnych i finału wojewódzkiego. W rozwiązaniach trzeba podać pełne uzasadnienia.
- **Naukowa Liga Matematyczna** (www.liganaukowa.pl) jest organizowana (także w wydaniu humanistycznym) przez XIV LO z Wrocławia dla dolnośląskich gimnazjów. Etap szkolny ma charakter testowy i wyłania 4-osobową reprezentację. Etap regionalny jest rozgrywany internetowo. W etapie wojewódzkim każdy uczeń rozwiązuje jedno zadanie indywidualnie w czasie 30 minut i jeszcze 2 zadania trzeba rozwiązać drużynowo w ciągu kolejnych 30 minut.
- **Międzyszkolny Konkurs im. Stefana Banacha** (www.mickiewicz.net.pl) jest organizowany przez I LO w Lublińcu dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych z regionu śląskiego. Jest jednoetapowy. Każda szkoła może wystawić 4-osobową reprezentację. Rozwiązania zadań należy podać z pełnymi uzasadnieniami.
- **Podkarpacki Konkurs Matematyczny im. prof. Jana Marszała** (www.lo-lancut.pl/konkurs-marszala) jest organizowany przez I LO w Łańcucie osobno dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych i gimnazjalistów. Ma trzy etapy: szkolny, powiatowy i wojewódzki. Najlepsi zawodnicy biorą udział w edycji międzynarodowej dla szkół z Rumunii, Słowacji, Ukrainy i Węgier. W każdym etapie uczniowie rozwiązują po trzy zadania, podając pełne uzasadnienia.
- **Podkarpacki Konkurs Matematyczny im. Franciszka Lei** (www.snm.edu.pl/oddzialy/podkarpacie) jest organizowany przez Oddział Podkarpacki Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki, Podkarpackie Centrum Edukacji Nauczycieli i IV LO w Rzeszowie. Adresowany jest do III klas gimnazjów oraz I i II klas szkół ponadgimnazjalnych. Ma cztery etapy: szkolny, powiatowy, rejonowy i wojewódzki. Rozwiązania zadań należy podać z pełnymi uzasadnieniami.
- **Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne** (www.wmii.uwm.edu.pl/~zawody) są organizowane przez Wydział Matematyki i Informatyki UWM w Olsztynie dla wszystkich poziomów edukacyjnych. Konkurs jest jednoetapowy, startuje w nim maksymalnie pięciu uczniów z każdej szkoły. Zadania wymagają uzasadnień.
- **zDolny Ślązak Gimnazjalista** (www.dodn.wroclaw.pl/zdolnyslazak) jest to konkurs organizowany przez Dolnośląski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli (także w interdyscyplinarnej wersji dla szkół podstawowych pod nazwą zDolny Ślązaczek). Eliminacje szkolne odbywają się niezależnie w kilku blokach przedmiotowych, w tym matematyczno-przyrodniczym. W etapie powiatowym i wojewódzkim uczeń wybiera jeden przedmiot konkursowy. W etapach szkolnym i powiatowym, zadania mają charakter testowy, a w finale – otwarty. Rozwiązania należy podać wraz z uzasadnieniem.

Konkursy w edukacji wczesnoszkolnej

Niewiele konkursów matematycznych jest adresowanych dla uczniów klas I–III szkoły podstawowej. Na tym etapie edukacyjnym uczeń chłonie wiedzę wszystkimi zmysłami i nie rozgranicza jej na poszczególne dziedziny. Jednak to właśnie dzieci w tym wieku są najwdzięczniejszymi uczestnikami zarówno kół matematycznych, jak i potyczek zadaniowych, gdyż ich zainteresowania są spontaniczne. Nagrodą jest radość ze współzawodnictwa. Zadaniem konkursów matematycznych na tym etapie jest przede wszystkim rozpoznanie zdolności przydatnych w dalszej matematycznej edukacji (rachunkowych, analitycznego i syntetycznego myślenia, porównywania i abstrahowania) oraz wspieranie rozwoju zainteresowań uczniów.

Na tym etapie dobrze sprawdzają się konkursy interdyscyplinarne (np. zDolny Ślązaczek, Świetlik Przyrodniczy lub Bóbr Informatyczny), łamigłówkowe (np. Mistrzostwa Polski w Sudoku, Mistrzostwa Polski w Grach Matematycznych i Logicznych) i rachunkowe (np. Mistrzostwa Polski w Tabliczce Mnożenia, Kangurek Matematyczny, Mistrzostwa Wrocławia w Szybkim Liczeniu czy śląskie Bajkowe Zadania). Są to konkursy indywidualne i na ogół biorą w nich udział dzieci, które mają już sprecyzowane zainteresowania, wykazują uzdolnienia matematyczne i mają odpowiednią wytrzymałość psychiczną. Najbardziej odpowiednie dla dzieci w tym wieku są jednak szkolne lub międzyszkolne konkursy tematyczne z elementami matematyki w zastosowaniach praktycznych (np. łódzki konkurs Młody Łodzianin – Europejczykiem, małopolski Nie od razu Kraków zbudowano, czy wrocławski Tyle liczb w całym mieście). Są to najczęściej konkursy drużynowe, wymagające umiejętności zbierania, przetwarzania i interpretowania informacji, z zadaniami zorientowanymi na różne obszary aktywności: matematycznej, przyrodniczej lub artystycznej. Powinny sprzyjać rozwojowi takich umiejętności, jak: czytanie ze zrozumieniem, orientacja na mapie, orientacja w terenie, rozwiązywanie zagadek logicznych, odczytywanie danych z tabel i diagramów.

Przegląd pozostałych konkursów matematycznych

Dla uczniów starszych klas szkoły podstawowej oraz gimnazjów i szkół ponadgimnazjalnych organizowane są konkursy matematyczne na szczeblu szkolnym, powiatowym, regionalnym i ogólnopolskim, niektóre z nich są międzynarodowe lub mają etap międzynarodowy. Organizatorami tych konkursów są szkoły i inne placówki oświatowe, uczelnie, stowarzyszenia i fundacje, wydawnictwa edukacyjne lub organy prowadzące szkoły. Wszyscy oni mogą się starać o patronat MEN lub odpowiedniego kuratora oświaty.

Przebierając w bogatej ofercie konkursów matematycznych, trudno od razu się zorientować w wartości merytorycznej i edukacyjnej poszczególnych propozycji. Nie świadczy o nich ani rozgłos, ani oprawa konkursu, ani liczba uczestników. Wiele ciekawych propozycji ma charakter lokalny i organizowanych jest siłami nauczycieli szkolnych i akademickich lub doradców metodycznych na ogół bez refundacji kosztów przyjazdu i zakwaterowania uczestników z odległych miejsc. Mimo to warto im się przyjrzeć i skorzystać z ich oferty.

Konkursy na ogół są indywidualne, rzadziej startują w nich reprezentacje szkół lub nawet całe klasy. Są też konkursy mieszane, indywidualne w pierwszym etapie, a drużynowe w kolejnym lub na odwrót. Nie wszystkie polegają na rozwiązywaniu zadań. Przedmiotem konkursu matematycznego mogą być prace badawcze, prace projektowe, referaty, prezentacje komputerowe, modele brył, a nawet fotografie i rysunki.

W niewielu konkursach (poza tymi rozgrywanymi na skalę międzynarodową: Kangurem Matematycznym czy Matematyką bez granic) zadania są przygotowywane w kilku wersjach językowych, umożliwiając udział w nich uczniom ze szkół międzynarodowych. Takie są na przykład: ogólnopolski konkurs Meridian, łódzki konkurs matematyczno-logiczny, Mistrzostwa Szaradziarskie lub Mistrzostwa Wrocławia w Szybkim Liczeniu.

Poniżej przedstawiamy zestawienie wybranych konkursów matematycznych, które zdobyły sobie już renomę na rynku edukacyjnym. Warto brać w nich udział lub korzystać z ich zasobów.

Konkursy międzynarodowe

- **Konkurs Prac Młodych Naukowców Unii Europejskiej** (www.fundusz.org/konkurs-dla-mlodych-badaczy) jest organizowany przez Komisję Europejską, a w Polsce odbywa się pod patronatem Funduszu na rzecz Dzieci. Obejmuje nauki ścisłe, przyrodnicze, technikę oraz nauki społeczne i ekonomiczne. Wymagane jest w nim zaprezentowanie własnej pracy badawczej, która wcześniej została nagrodzona w konkursie narodowym. Każdy kraj może zgłosić najwyżej trzy prace autorów w wieku 14–20 lat, którzy muszą być uczniami lub studentami co najwyżej I roku, przy czym praca musiała powstać przed rozpoczęciem studiów. Laureaci otrzymują nagrody pieniężne i staże badawcze w wiodących ośrodkach akademickich Europy.
- **Matematyka bez granic** (www.mbg.uz.zgora.pl) to konkurs organizowany pod auspicjami Rady Europy, a w Polsce – pod patronatem Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Startują w nim w tym samym terminie całe klasy od IV szkół podstawowych do I ponadgimnazjalnych. Zadania bazują na zastosowaniach matematyki w sytuacjach życia codziennego. Nie są trudne, ale często wymagają przyrodniczego, technicznego lub plastycznego podejścia do badanego problemu. Jedno zadanie podane jest w kilku językach obcych i w jednym z nich trzeba zredagować rozwiązanie. Każdy uczeń może wnieść swoje umiejętności do zbiorowej pracy. Laureaci są wyłaniani i nagradzani w obrębie regionów w kraju.
- **Kangur Matematyczny** (www.kangur-mat.pl) to konkurs masowy, skierowany do szerokiego kręgu uczniów począwszy od II klasy szkoły podstawowej i odpłatny. Wspominamy jednak o nim, ponieważ jest to najstarszy i najliczniejszy z matematycznych konkursów. W Polsce jego organizacją zajmuje się Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu. Konkurs jest indywidualny, odbywa się w tym samym terminie we wszystkich szkołach na świecie, ma charakter testu jednokrotnego wyboru. W wielu szkołach Dzień Kangura jest obchodzony jako święto matematyki. Laureaci konkursu biorą udział w krajowych i międzynarodowych obozach matematycznych.
- **Mistrzostwa Polski w Grach Matematycznych i Logicznych** (www.grymat.im.pwr.wroc.pl) to konkurs łamigłówkowy, w którym biorą udział zawodnicy w każdym wieku, podzieleni na osiem kategorii w zależności od poziomu wykształcenia matematycznego. Jest odpłatny. Ma ponad 20-letnią tradycję. W Polsce organizuje go Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej. Pierwszy etap jest korespondencyjny, drugi – internetowy, a trzeci to – finał krajowy, który odbywa się przez dwa dni we Wrocławiu i jest testem krótkiej odpowiedzi. Zadania nie wymagają znacznej wiedzy matematycznej, raczej logicznego myślenia, wyobraźni geometrycznej i sprawności rachunkowej. Laureaci otrzymują nagrody rzeczowe, wolny wstęp na Politechnikę Wrocławską i prawo startu w zawodach międzynarodowych w Paryżu.
- **Pikomat** (www.ssodelta.edu.pl zakładka: Konkurs Pikomat) jest to konkurs płatny, organizowany przez Śląskie Stowarzyszenie Oświatowe „Delta” w Katowicach. Startują w nim uczniowie szkół podstawowych i gimnazjów z Polski, Czech i Litwy. Konkurs ma cztery etapy, w każdym startuje się indywidualnie, a do rozwiązania są cztery zadania otwarte. W finale jest też część zespołowa wymagająca rozwiązania zadania praktycznego.

- **Genius Logicus** (www.geniuslogicus.eu/pl) to płatne zawody łamigłówkowe organizowane przez grupę Eurogenius ze Słowacji. Obejmują wszystkie typy szkół. Można w nich startować w trybie korespondencyjnym lub szkolnym, w warunkach kontroli czasu i samodzielności pracy. Najlepsi otrzymują krajowe i międzynarodowe certyfikaty rankingowe oraz nagrody rzeczowe.

Konkursy ogólnopolskie

- **Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki** (www.deltami.edu.pl, zakładka: Redakcja) jest organizowany przez redakcję miesięcznika „Delta" oraz Polskie Towarzystwo Matematyczne i adresowany do uczniów szkół ponadpodstawowych. Składa się z eliminacji i finału, a polega na przygotowaniu pracy badawczej z matematyki. Do finału kwalifikowanych jest pięć najlepszych prac, których prezentacja odbywa się podczas konferencji PTM lub SEM. Zwycięzca otrzymuje nagrodę pieniężną i może się starać o udział w konkursie Prac Młodych Naukowców UE.
- **Konkurs Prac Matematycznych** (www.towarzystwo.edu.pl zakładka: Konkursy > Matematyczny) jest organizowany przez Krakowskie Młodzieżowe Towarzystwo Przyjaciół Nauk i Sztuk we wszystkich kategoriach wiekowych. Jego celem jest rozwijanie umiejętności wypowiadania się o matematyce.
- **Ogólnopolski Sejmik Matematyków** (www.spinor.edu.pl/sejmik) jest organizowany przez Pracownię Matematyki i Informatyki Pałacu Młodzieży w Katowicach i adresowany do uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Jego celem jest rozwijanie umiejętności prezentowania zagadnień matematycznych w ciekawej i nieszablonowej formie (niekoniecznie wyników własnych). Uczestnicy piszą pracę na jeden z tematów podanych przez organizatorów lub wybrany samodzielnie. Finaliści są zapraszani na dwudniowe spotkanie, podczas którego prezentują swoje prace. Najlepsi otrzymują nagrody rzeczowe.
- **Powszechny Konkurs Internetowy** (www.sigma.mini.pw.edu.pl/konkurs) adresowany jest do uczniów szkół ponadgimnazjalnych i prowadzony przez Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych Politechniki Warszawskiej. Nie jest zbyt trudny. Jego celem jest zachęcenie uczniów klas maturalnych do powtarzania materiału i przygotowania się do podjęcia studiów. Ma trzy etapy, z tego dwa internetowe. Najlepsi w rankingu zapraszani są na finał do Warszawy. Laureaci otrzymują nagrody rzeczowe i wolny wstęp na Politechnikę Warszawską.
- **Diamentowy Indeks AGH** (www.moodle.cel.agh.edu.pl/diament) to konkurs przedmiotowy (poza matematyką dostępne są jeszcze trzy inne dziedziny) organizowany w formie trzystopniowych zawodów: szkolnych, okręgowych i centralnych. Laureaci są przyjmowani na studia na AGH w Krakowie z pominięciem procedury rekrutacyjnej.
- **Matmix** (www.matmix.pl) to ogólnopolski internetowy konkurs matematyczny dla gimnazjalistów organizowany przez XL LO w Warszawie. Składa się z dwóch etapów. Przez pięć miesięcy uczestnicy rozwiązują zadania w domu i wysyłają odpowiedzi przez internet, a najlepsi są zapraszani na finał do Warszawy. Finał ma formę testu wielokrotnego wyboru.
- **Meridian** (www.mmc.edu.pl) jest organizowany przez Międzynarodową Szkołę „Meridian" z Warszawy i skierowany do uczniów wszystkich typów szkół z podziałem na kategorie wiekowe. Jego celem jest odkrywanie matematycznych talentów. Eliminacje są prowadzone drogą elektroniczną, a finał odbywa się w Warszawie. Laureaci otrzymują nagrody rzeczowe i stypendia na naukę w jednej ze szkół sieci *Meridian*.
- **Konkurs Matematyczny Origami „Żuraw"** (www.fmw.uni.wroc.pl, zakładka: Dla uczniów > Mat-origami Żuraw) to konkurs organizowany przez Fundację Matematyków Wrocławskich dla uczniów ze wszystkich typów szkół, nauczycieli i rodziców. Wymaga wyobraźni geometrycznej, zdolności manual-

nych i umiejętności uzasadniania. W eliminacjach zawodnicy wykonują w domu modele matematyczne (płaskie lub przestrzenne) w technice origami, a w finale rozwiązują zadania geometryczne związane z matematycznym origami.

- **Kwadratura Koła – Matematyczne Mistrzostwa Dzieci i Młodzieży** (www.matematykainnego wymiaru.pl) są organizowane przez firmę ElitMat z Mińska Mazowieckiego. Jest to konkurs jednoetapowy z zadaniami testowymi w tym interdyscyplinarnymi i zawierającymi liczne ciekawostki z historii matematyki.
- **Zobaczyć matematykę** (www.zobaczycmatematyke.pl) to konkurs organizowany przez Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego i adresowany do uczniów na tyle zaznajomionych z techniką komputerową, aby samodzielnie przygotować animacje, wykorzystując powszechnie dostępne oprogramowanie. Tematem pracy ma być wizualizacja jakiegoś zagadnienia matematycznego. Laureaci otrzymują nagrody rzeczowe i są zwolnieni z zajęć z technologii informacyjnej, jeśli podejmują studia na UJ.
- **Mistrzostwa Polski w Łamigłówkach** (www.sfinks.org.pl) organizuje Fundacja Rozwoju Matematyki Rekreacyjnej Sfinks. Są to zawody otwarte, niezależne od wieku. Eliminacje odbywają się przez internet, a finał najczęściej w Warszawie. Zawodnicy w określonym czasie rozwiązują logiczne zadania diagramowe lub łamigłówki geometryczno-topologiczne. Spośród finalistów wyłaniana jest 4-osobowa reprezentacja Polski na mistrzostwach świata.

Konkursy zadaniowe z matematyki są też prowadzone przez czasopisma popularnonaukowe skierowane do młodzieży lub nauczycieli. Mają one charakter otwartej ligi zadaniowej. Może w nich brać udział każdy, przesyłając na adres redakcji rozwiązania zadań zamieszczanych w kolejnych numerach. W następnym numerze publikowane są: odpowiedzi, omówienie błędów i ranking zawodników. Najbardziej znane są trzy takie konkursy:

- **Liga zadaniowa „Delty”** (www.deltami.edu.pl, zakładka: Klub 44 Matematyka) to nieustający, otwarty konkurs organizowany przez redakcję miesięcznika „Delta" (oprócz matematycznej prowadzona jest też liga zadaniowa z fizyki). Zadania mają zróżnicowany poziom trudności, ale na ogół są dość trudne. Do konkursu można przystąpić w dowolnym momencie i robić dowolnie długie przerwy. Zawodnik, który za rozwiązania zadań zdobędzie 44 punkty, staje się członkiem Klubu 44 M.
- **Łamanie głowy, czyli burza w mózgu** (www.mmm.uni.wroc.pl, zakładka: Konkurs) to nieustający, otwarty konkurs organizowany przez redakcję kwartalnika „Magazyn Miłośników Matematyki". Zadania są bardzo zróżnicowane: od łamigłówek i zagadek lateralnych po problemy matematyczne związane z omawianymi w danym numerze zagadnieniami. Za zdobycie określonej liczby punktów za rozwiązania są przyznawane tytuły Eksperta, Mistrza i Arcymistrza Łamania Głowy oraz dyplomy i odznaki.
- **Konkurs zadaniowy „Matematyki”** (www.edupress.pl/wydawane/matematyka) to nieustający, otwarty konkurs organizowany przez redakcję miesięcznika dla nauczycieli „Matematyka". Zadania są trudne, często wykraczają poza umiejętności przeciętnego licealisty. Zawodnik, który zgromadzi 250 punktów, otrzymuje nagrodę książkową.

Wiele bezpłatnych konkursów matematycznych i logicznych jest też organizowanych przez serwisy internetowe. Mają różne regulaminy, strukturę, adresatów, stopień trudności zadań i czas trwania. Jedynym warunkiem udziału jest na ogół rejestracja w serwisie. Zwycięzcy otrzymują książki, czasopisma, łamigłówki lub gry edukacyjne. Oto kilka przykładowych konkursów z serwisu www.math.edu.pl.

- **Alfa** to konkurs adresowany do uczniów szkół podstawowych. Ma charakter cykliczny. Co tydzień pojawia się test składający się z 10 pytań. Liczy się czas rozwiązania zadań.

- **Liga zadaniowa** trwa trzy miesiące i jest podzielona na jednodniowe rundy, w czasie których zawodnik rozwiązuje jedno zadanie otwarte. Zadania mają różny stopień trudności. Są przeznaczone dla gimnazjalistów.
- **Sinus** to zmagania matematycznych sprinterów. Eliminacje odbywają się w każdy wtorek i polegają na rozwiązaniu jak największej liczby zadań w ciągu godziny. Na liście rankingowej umieszczane są nazwiska 10 najlepszych.
- **Problem tygodnia** to konkurs łamigłówkowy. Nad rozwiązaniem pojedynczego zadania można pracować cały tydzień, jednak w miarę upływu czasu, zawodnik otrzymuje coraz mniej punktów. W ciągu tygodnia ma prawo do trzech prób rozwiązania zadania.
- **Głowicjusz** przeznaczony jest również dla miłośników łamigłówek, ale tym razem w ciągu godziny należy rozwiązać pięć zadań. W zestawie są zagadki geometryczne, liczbowe i logiczne. Zadania nie wymagają wiedzy matematycznej, tylko umiejętności stawiania hipotez i ich weryfikowania.
- **Logikus** trwa cały rok, a poszczególne rundy są podsumowywane co miesiąc. Runda polega na rozwiązywaniu około 20 zadań diagramowych: tangramów, algebrafów, obrazków logicznych itp.

Konkursy regionalne

Ich liczba jest ogromna. Wybraliśmy kilkanaście propozycji z różnych części Polski. Konkursy te odbywają się od wielu lat i cieszą się dużym uznaniem. Głównym kryterium wyboru było pokazanie różnorodności form takich konkursów.

- **Jasielski Konkurs Matematyczny im. Hugona Steinhausa** (www.1lo.jaslo.pl, zakładka: Konkurs) jest organizowany przez I LO w Jaśle dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych i uzdolnionych gimnazjalistów. Zadania wymagają uzasadnień, a jedno jest autorstwa patrona konkursu lub jest to problem ukazujący aplikacyjny charakter matematyki.
- **Laur „Hugona"** (www.gimn1.wroclaw.pl, zakładka: Konkurs) jest organizowany przez Gimnazjum nr 1 z Wrocławia dla dolnośląskich gimnazjalistów. Eliminacje szkolne są interdyscyplinarne – dotyczą przedmiotów ścisłych i przyrodniczych – i wyłaniają 4-osobową reprezentację szkoły. Zadania finałowe – teoretyczne i praktyczne – co rok dotyczą innego tematu związanego z działalnością patrona konkursu.
- **Konkurs Matematyczny im. Jana Śniadeckiego** jest organizowany przez Gimnazjum nr 2 w Warszawie dla uczniów szkół podstawowych z Mokotowa. Jest dwuetapowy. Do finału wchodzi dwójka najlepszych uczniów z każdej szkoły. Zadania są testowe.
- **Krakowska Matematyka** (www.snm.edu.pl/oddzialy/krakow) jest organizowana przez Krakowski Oddział Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki dla uczniów szkół podstawowych. Konkurs jest dwuetapowy. Co rok zadania łączy wspólny motyw związany z historią lub teraźniejszością Krakowa.
- **Krapkowicki Konkurs Matematyczny im. Tadeusza Knysza** (www.lo.krapkowice.pl, zakładka: Konkurs) jest organizowany przez ZS w Krapkowicach dla gimnazjów i szkół ponadgimnazjalnych z podziałem na licea i technika. Zasięgiem obejmuje województwo opolskie. Startują w nim 4-osobowe reprezentacje szkół, rozwiązując zadania matematyczne (wymagane jest uzasadnienie) i łamigłówkowe.
- **Liga zadaniowa** (www.liga.mat.umk.pl) jest organizowana przez Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu. Jej celem jest rozwijanie zainteresowań matematycznych wśród uczniów szkół podstawowych i gimnazjów. Ma trzy etapy. Składa się z eliminacji szkolnych i pięciu spotkań seminaryjnych rozłożonych w czasie roku szkolnego. W czasie spotkań uczniowie rozwiązują zadania konkursowe i otrzymują zestawy zadań przygotowawczych do następnego spotkania.

- **Marsz na orientację „Orientuj się i licz"** (www.orientuslodz.pl , zakładka: Orientuj się i licz) jest organizowany przez Uczniowski Klub Sportowy „Orientuś" z Gimnazjum nr 23 w Łodzi. Startują w nim 3-osobowe patrole (po trzy z każdej szkoły) z podziałem na kategorie wiekowe. Posługując się mapą i kompasem, patrol musi odszukać w terenie punkty kontrolne zaznaczone na mapie i rozwiązać zestaw zadań matematycznych.
- **Matematyczne Marsze na Orientację** (www.fmw.uni.wroc.pl, zakładka: Dla uczniów > Marsz na orientację) są organizowane przez Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego. W zawodach biorą udział 3-osobowe patrole uczniów, nauczycieli lub rodziców (po cztery z każdej szkoły). Zawodnicy, posługując się mapą, kompasem i przyborami geometrycznymi, muszą odszukać w terenie punkty kontrolne zaznaczone na mapie, rozwiązać zadania konstrukcyjne i łamigłówki logiczne pozwalające wyznaczyć na mapie i znaleźć w terenie punkty tajemnicze oraz rozwiązać zestaw zadań matematycznych.
- **Matematyczna Piramida** (www.wckp.lodz.pl, zakładka: Konkursy) jest organizowana przez Łódzkie Centrum Doskonalenia Nauczycieli i Kształcenia Praktycznego. Jej celem jest pokazanie związków matematyki ze sztuką. Jest adresowana do uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Ma trzy etapy. W I i II zawodnicy rozwiązują zadania, a finaliści przygotowują i prezentują pracę projektową związaną z tematem podanym przez organizatorów (np. *Matematyczne wizje Leonarda da Vinci*). Opracowane przez uczniów multimedialne prezentacje służą potem jako środki dydaktyczne w szkołach.
- **Matematyczny Czar Par** (www.wckp.lodz.pl, zakładka: Konkursy) jest organizowany przez SP 109 i XXXI LO w Łodzi i skierowany do uczniów klas VI szkół podstawowych. Biorą w nim udział pary wyłonione w szkolnych eliminacjach, które rywalizują w ośmiu konkurencjach łamigłówkowych i zadaniowych. Pomysłodawcami zadań i jurorami są licealiści.
- **Nudna Matematyka** (www.spinor.edu.pl/konkursy) jest organizowana przez Pracownię Matematyki i Informatyki Pałacu Młodzieży w Katowicach dla szkół podstawowych i gimnazjów. Zawody są płatne, trzyetapowe. Zadania mają charakter testu krótkiej odpowiedzi.
- **Opolska Mała Olimpiada Matematyczna** (www.modnopole.pl) jest organizowana od 43 lat, obecnie przez Miejski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli w Opolu dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Ma ich zachęcić do startowania w Olimpiadzie Matematycznej.
- **Potyczki ze statystyką** (www.pg5opole.wodip.opole.pl, zakładka: Potyczki ze statystyką) jest organizowany przez Gimnazjum nr 5 w Opolu dla gimnazjalistów z województwa. Nagrodą jest puchar przechodni dyrektora szkoły. W ramach eliminacji szkolnych uczniowie zbierają i opracowują dane statystyczne dotyczące swojej klasy i szkoły na zadany temat. W finale reprezentacje szkół rozwiązują zadania otwarte i testowe ze statystyki.
- **St@ś** (www.staszic.waw.pl/konkursy) jest organizowany przez uczniów XIV LO w Warszawie dla uczniów szkół podstawowych z Ochoty. Jest jednoetapowy, udział biorą 10-osobowe reprezentacje szkół. Zadania wymagają uzasadnienia, co jest rzadkością w konkursach dla SP.
- **Torus** i **Wstęga Möbiusa** (www.snmzoliborz.blogspot.com) konkursy te są organizowane przez Żoliborski Oddział Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki odpowiednio dla uczniów szkół podstawowych i gimnazjów. Oba mają te same zasady i terminy. Są dwuetapowe, mają te same zadania dla wszystkich klas, ale rozłączne klasyfikacje wyników.
- **Wektor** (www.us.szc.pl/ptm, zakładka: Wektor) jest organizowany przez Wydział Matematyczno-Fizyczny Uniwersytetu Szczecińskiego i adresowany do uczniów szkół ponadgimnazjalnych z wyjątkiem

maturzystów. Ma charakter kolokwium z wybranego działu matematyki, nieobjętego programem szkolnym. Uczestnicy po wysłuchaniu wykładu samodzielnie rozwiązują zadania z wykorzystaniem przedstawionej wcześniej teorii.

- **Wieża Babel** (www.fmw.uni.wroc.pl, zakładka: Dla uczniów > Lingwistyka matematyczna) jest organizowana przez Fundację Matematyków Wrocławskich dla uczniów szkół podstawowych i przygotowuje do udziału w Olimpiadzie Lingwistyki Matematycznej. Zawody są dwuetapowe. Do finału wchodzi trzech najlepszych uczniów ze szkoły i wszyscy powyżej progu kwalifikacyjnego. Zadania eliminacyjne mają formę testu krótkiej odpowiedzi, finałowe wymagają uzasadnienia.
- **W świecie matematyki – Wojewódzki Konkurs im. Włodzimierza Krysickiego** (www.sites.google. com/site/kolonaukaktuarialnychpl/dzialalnosc/konkurs) jest organizowany przez Instytut Matematyki i Koło Nauk Aktuarialnych Politechniki Łódzkiej dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Składa się z testowych eliminacji wyłaniających 3-osobowe reprezentacje szkół oraz finału, w którym zawodnicy rozwiązują cztery zadania z matematyki szkolnej oraz trzy problemy z matematyki wyższej (na podstawie dołączonych materiałów zawierających definicje, twierdzenia i przykłady).

Więcej informacji na temat różnego rodzaju konkursów matematycznych można znaleźć na stronach internetowych Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej (www.sem.edu.pl zakładka: Konkursy matematyczne) oraz Wrocławskiego Portalu Matematycznego (www.matematyka.wroc.pl zakładka: Konkursy).

Zrób sobie konkurs matematyczny

Wcale nie jest łatwo zorganizować taki konkurs, który byłby atrakcyjny dla uczniów, a jednocześnie konkurencyjny w stosunku do propozycji już istniejących. Przede wszystkim musimy odpowiedzieć sobie na kilka pytań.

- Po co chcemy taki konkurs zorganizować? Czym ma się różnić od już istniejących?
- Czy jest na taki konkurs zapotrzebowanie? Do kogo ma być adresowany? Czy będą mogli brać w nim udział tylko uczniowie naszej szkoły, czy miasta, a może początkowa inicjatywa ma szansę rozwinąć się w konkurs ogólnopolski?
- Czy ma to być konkurs elitarny (dla wybitnie zdolnych, bazujący na umiejętnościach wykraczających poza podstawę programową), czy egalitarny – dostępny dla przeciętnego ucznia, dający przyjemną intelektualną rozrywkę i popularyzujący matematykę jako narzędzie poznawania świata?
- Czy będzie to konkurs płatny? Przez kogo opłacany? Jak wysoka będzie to odpłatność?
- Czy konkurs będzie indywidualny czy zespołowy? Czysto matematyczny czy interdyscyplinarny? Na czym będzie polegał?
- Co będzie przedmiotem oceny konkursowej (rozwiązywanie zadań, prace badawcze lub projektowe czy prace plastyczne)?
- Jaki charakter mają mieć konkursowe zadania (łamigłówkowy, teoretyczny, geometryczny, komputerowy, rachunkowy, praktyczny)?
- Jaką nazwę będzie nosił konkurs? Poważną czy raczej dowcipną? Czy dobrze się ona kojarzy?
- Czy konkurs będzie miał patrona? Jakie będzie miał logo?
- Ile będzie etapów i jakie będą kryteria kwalifikacji do nich?
- Jak rozpropagujemy informacje o konkursie?
- Jak będą przebiegały zgłoszenia do konkursu? Jak się kontaktować z uczestnikami?

- Kiedy najlepiej zorganizować konkurs? Jak ułożyć harmonogram, aby uniknąć kolizji z ważnymi wydarzeniami w szkole lub innymi imprezami skierowanymi do tych samych odbiorców?
- Jak będą zorganizowane eliminacje? Ilu mogą mieć uczestników?
- Gdzie odbędzie się finał i na jakich zasadach? Ilu może mieć uczestników?
- Czy to będzie przedsięwzięcie jednorazowe (np. związane z jakąś rocznicą), czy (w razie umiarkowanego sukcesu) przewidujemy dalsze edycje?
- Czy będziemy się starać o patronat jakiejś instytucji? Gdzie znajdziemy sprzymierzeńców, współpracowników, sponsorów?
- Jakie przewidujemy nagrody (darowane lub przechodnie, materialne czy niematerialne)?
- Kto będzie autorem zadań lub tematów prac? Kto potem sprawdzi i oceni rozwiązania?
- Czy są potrzebne i kto opracuje materiały pomocnicze dla uczniów?
- Jakimi środkami finansowymi możemy dysponować i na co będą przeznaczone?
- Czego chcemy nauczyć uczestników? Jak przekonamy się, czy ten cel został zrealizowany?
- Jakie dopuszczamy możliwości modyfikacji reguł konkursu?
- Jakie widzimy realne zagrożenia i jak sobie z nimi poradzić?

Kiedy już zapadnie decyzja o organizacji konkursu, zacznij od starannego przygotowania dokumentacji. Zapewni ona sprawną organizację pracy. Powinna zawierać regulamin z ewentualnymi załącznikami (np. wzorem karty zgłoszenia, drukiem protokołu prac szkolnej komisji konkursowej), harmonogram oraz informator dla uczniów i nauczycieli. Dokumenty te nie powinny być zbyt obszerne, by nie zniechęcały do starannego ich przeczytania, nie mogą być jednak zbyt lapidarne i ogólnikowe, ponieważ nie spełnią wówczas funkcji informacyjnej.

W regulaminie powinny się znaleźć szczegółowe informacje na temat organizacji i przebiegu zawodów. Trzeba je dobrze przemyśleć, gdyż regulamin nie powinien być zmieniany w czasie trwania konkursowych zmagań. Ogólną zawartość regulaminu konkursu określa Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej w sprawie organizacji oraz sposobu przeprowadzania konkursów, turniejów i olimpiad, ale jego szczegółowa zawartość zależy tylko od organizatorów i jest zdeterminowana specyfiką konkursu. Na pewno powinny się w nim znaleźć:

- pełna nazwa, numer edycji i znak graficzny konkursu,
- nazwa, adres i telefon organizatora,
- informacje o współorganizatorach, patronatach, sponsorach,
- określenie celów i adresata konkursu,
- opis, co będzie przedmiotem konkursu,
- określenie sposobu zgłaszania się do konkursu,
- liczba etapów konkursu, sposób ich przeprowadzania,
- opis trybu pracy komisji na poszczególnych etapach konkursu,
- wykaz środków i materiałów, z których uczestnik może/musi/nie może korzystać w czasie konkursu,
- krótki opis wiedzy i umiejętności wymaganych na poszczególnych etapach konkursu (ze szczególnym uwzględnieniem umiejętności wykraczających poza zakres obowiązującej podstawy programowej),
- kryteria awansu do kolejnych etapów,
- opis sposobu ustalania i ogłaszania wyników,
- kryteria przyznawania tytułów finalisty i laureata,
- uprawnienia przysługujące finalistom i laureatom, przewidywane nagrody,

- warunki dyskwalifikacji zawodnika,
- opis procedur odwoławczych lub postępowania w wypadkach szczególnych (np. spóźnienie lub nieobecność na eliminacjach, nakładanie się terminów kilku konkursów),
- informacja o stronie internetowej konkursu.

Dodatkowym dokumentem jest harmonogram konkursu, który może stanowić część regulaminu, ale ponieważ co rok się zmienia, lepiej by był odrębny. Powinny być w nim podane:

- termin i sposób dokonywania zgłoszeń,
- nazwa i numer konta, na które należy dokonać ewentualnych wpłat, ich termin i wysokość,
- terminy i miejsca ewentualnych spotkań ze szkolnymi opiekunami konkursu lub terminy i miejsce możliwych konsultacji,
- terminy i miejsca eliminacji oraz dalszych etapów konkursu,
- terminy i sposób ogłaszania wyników poszczególnych kwalifikacji,
- termin składania odwołań i reklamacji,
- termin podsumowania konkursu i gali laureatów,
- terminy i miejsca ewentualnych wycieczek lub obozów, które miałyby być nagrodami dla uczestników/finalistów/laureatów.

Ważnym dokumentem zwłaszcza dla przyszłego uczestnika jest także informator konkursowy, dzięki któremu uczeń będzie mógł się dobrze przygotować do startu. Informator powinien zawierać szczegółowe wymagania, przykładowe zadania, wskazówki, jak się przygotować do eliminacji i gdzie znaleźć pomocne materiały. Zawartość informatora może być wzbogacana i aktualizowana w miarę rozwoju konkursu. Informator zazwyczaj jest dość obszerny, dlatego najwygodniej zamieścić go na stronie internetowej lub rozesłać pocztą elektroniczną do szkolnych opiekunów konkursu. Informator powinien zachęcać do udziału w zawodach i wspierać potencjalnych zawodników w samodzielnym pozyskiwaniu wiedzy. Warto w nim zamieścić:

- szczegółowe cele konkursu, ze wskazaniem rozwijanych umiejętności,
- podstawy prawne organizacji konkursu,
- szczegółowy zakres wymaganych umiejętności i wiadomości (z ewentualnym podziałem na poszczególne etapy konkursu),
- opis tematyki i formy zadań lub opis wymagań dotyczących prac konkursowych,
- zestawy zadań przygotowawczych lub z poprzednich edycji z odpowiedziami, wskazówkami i pełnymi rozwiązaniami,
- spis literatury dla uczestników i opiekunów,
- regulamin konkursu,
- dodatkowe wiadomości, których celem jest zachęcenie do udziału w zawodach (np. historia konkursu, geneza nazwy, anegdoty i ciekawostki związane z poprzednimi edycjami, sukcesy laureatów).

Zamiast zakończenia – garść dobrych rad

- Mierz siły na zamiary. Zanim podejmiesz decyzję o organizacji nowego konkursu, zastanów się, czy wystarczy ci sił, czasu, wytrwałości i środków na realizację swojego pomysłu.
- Korzystaj z doświadczeń innych. Zapoznaj się z funkcjonowaniem innych konkursów o podobnej formule. Jeśli będzie to możliwe, porozmawiaj z ich organizatorami o trudnościach, z jakimi przyjdzie ci się zmierzyć.
- Działaj w grupie. Przedstaw swój pomysł zaprzyjaźnionym nauczycielom, uczniom, rodzicom. Dowiedz się, co o nim sądzą. Uzyskaj akceptację dyrektora szkoły. Staraj się pozyskać współpracowników, partnerów i sponsorów, na których będziesz mógł polegać.
- „Głową muru nie przebijesz, ale jeśli czym, to głową" – mawiał Hugo Steinhaus. Ty też zarażaj innych swoim entuzjazmem, ale pamiętaj, że aby konkurs sprawnie funkcjonował, muszą się znaleźć chętni do startu w nim, miejsce, w którym będą się odbywać eliminacje, obsługa merytoryczna i techniczna.
- Korzystaj z multimediów. Obniży to znacznie koszty i usprawni organizację konkursu.

6. Obóz matematyczny

Małgorzata Mikołajczyk, Wrocław

Czemu służą i dla kogo są przeznaczone obozy matematyczne? Jak je zaplanować i zorganizować, by połączyć przyjemny wypoczynek i intelektualną rozrywkę z rozwijaniem wiedzy i umiejętności matematycznych? Jak dostosować temat obozu do wieku uczestników? Poniższy artykuł odpowiada na te pytania i wiele innych.

Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego i Fundacja Matematyków Wrocławskich dwa razy w roku organizują obozy matematyczne dla dzieci i młodzieży. Są to: Zimowe Szkoły Matematyki – organizowane od 1990 roku (dla licealistów i wyjątkowo zdolnych gimnazjalistów) oraz Letnie Obozy Naukowe – prowadzone od 2001 roku (dla uczniów ze wszystkich poziomów edukacyjnych). Biorą w nich udział uzdolnieni matematycznie uczniowie ze szkół z Dolnego Śląska i Opolszczyzny. Przez lata były to obozy międzynarodowe, co podsycało matematyczne współzawodnictwo, ale i zacieśniało przyjaźnie oraz pozwalało wymieniać się informacjami dotyczącymi systemów edukacyjnych w innych krajach. Obozy te mają swoje tradycje i specyfikę, a liczba chętnych zawsze przekracza liczbę miejsc. Zajęcia dydaktyczne są prowadzone przez studentów, doktorantów i pracowników naukowych Instytutu Matematycznego UWr (studenci specjalności nauczycielskiej w programie studiów mają kurs wychowawców kolonijnych).

Koegzystencja

Nasze obozy są na ogół pięciodniowe i bierze w nich udział około 100 uczestników. Zajęcia prowadzone są w trzech grupach. Wtedy wysiłek włożony w ich przygotowanie jest racjonalnie wykorzystany (zajęcia powtarzane są w każdej z grup).

Ciekawym (ale i odważnym) doświadczeniem wychowawczym jest łączenie podczas obozów letnich zajęć dla różnych kategorii wiekowych (najczęściej warsztatów łamigłówkowych lub modelarskich oraz gier symulacyjnych, planszowych lub terenowych). Starsi uczniowie traktują młodszych z dużym szacunkiem, doceniając ich spryt i inteligencję, a jednocześnie stają się dla nich pewnego rodzaju idolami i wzorami do naśladowania, co ich samych zobowiązuje do właściwych zachowań. Paradoksalnie więc na takim obozie utrzymanie dyscypliny jest znacznie łatwiejsze. Starsi uczniowie z poczucia odpowiedzialności za młodszych zwracają im uwagę, gdy ci zrobią coś nie tak, pomagają im i chętnie się nimi opiekują. Ten model dobrze się sprawdza na przykład podczas wycieczek, gdyż żadna ze stron (starając się trzymać fason) nie marudzi. Starsi koledzy często lepiej i skuteczniej niż nauczyciele potrafią przywołać młodszych do porządku, czy wytłumaczyć im konieczność zaakceptowania zasad obozowego życia (co nie zawsze przychodzi uczniom łatwo).

Podobną przewagę mają obozy i grupy koedukacyjne nad grupami typu *single-sex*.

Dyscyplina

Utrzymanie dyscypliny staje się bardzo ważne, gdy obóz jest międzyszkolny, a uczniowie z daleka od swoich nauczycieli czują się w dużej grupie anonimowi i bezkarni (niestety nawet utalentowane dzieci sprawiają niekiedy kłopoty wychowawcze). Dzięki polityce odpowiedzialnego uczestnictwa, braku tolerancji dla łamania dyscypliny oraz wieloletniej współpracy ze szkołami jedynym problemem trudnym do przezwyciężenia na naszych obozach jest zachowanie minimalnego czasu nocnego odpoczynku. Trzeba pamiętać, że uczestnicy obozu mają podobne zainteresowania, których często nie mają z kim dzielić w macierzystej szkole, są więc dla siebie nawzajem bardzo atrakcyjni intelektualnie (i nie tylko), a wspólne zainteresowania szybko cementują grupę. Często pochłaniają ich proponowane zadania na przykład z ligi obozowej i do późna w nocy je rozwiązują lub grają w gry logiczne i towarzyskie. Niedopilnowanie czasu snu skutkuje tym, że już w trzecim dniu uczestnicy masowo podsypiają podczas zajęć. Tym ważniejsze jest ustalenie jasnych reguł i ich konsekwentne egzekwowanie.

Na naszych obozach nie ma kar, nie stawiamy niemal żadnych zakazów i nie tworzymy skomplikowanych regulaminów. Jest za to wprowadzana w życie zasada odpowiedzialnego uczestnictwa. Wyjaśnia ją zamieszczony poniżej, wypracowywany przez lata wzór zgody na wyjazd, podpisywany przez rodziców i ucznia.

Wyrażam zgodę na wyjazd na Zimową Szkołę Matematyki do .... w dniach .... mojego dziecka .... Biorę odpowiedzialność finansową za wszystkie szkody materialne wyrządzone przez dziecko, w szczególności za straty wynikłe z niewłaściwego użytkowania sprzętów w ośrodku.

podpis rodzica

Wyjazd na obóz jest nagrodą dla wyróżniających się uczniów. Jest całkowicie dobrowolny. Nie musisz brać w nim udziału, jeśli wiesz, że ciężko będzie Ci respektować zasady, jakie na nim obowiązują. Naszym celem jest zorganizowanie dobrej zabawy, wysokiego poziomu szkolenia i bezpiecznego wypoczynku. Na obozie nie ma kar, ale musisz ponieść konsekwencje swoich wyborów i zachowań.

1) Dla bezpieczeństwa uczestników niedozwolone jest spożywanie alkoholu.
2) Oddalenie się z miejsca zamieszkania lub odłączenie od grupy podczas zajęć możliwe jest tylko po uzyskaniu zgody opiekuna.
3) Żeby nauczyć się czegoś i uszanować trud osób przygotowujących zajęcia obowiązuje minimum 5 godzin snu (od 2.00 do 7.00). W godzinach od 0.00 do 7.00 w pokojach mieszkalnych obowiązuje cisza nocna (wyłączone światło, muzyka itp.). Od 0.00 do 2.00 można przebywać tylko w świetlicy. O godzinie 22.00 zamykane są drzwi budynków mieszkalnych, a o 2.00 gaszone jest światło w świetlicach.

Jeśli złamiesz te zasady, musisz wrócić do domu. Następna szansa będzie w przyszłym roku!

Wybory, jakich dokonujesz, zależą od Ciebie – wybieraj mądrze!

Zapoznałem się z powyższymi zasadami.

podpis ucznia

W przypadku złamania powyższych zasad przez moje dziecko*)

- wyrażam zgodę na jego samodzielny powrót do domu, po uprzednim telefonicznym powiadomieniu przez organizatorów o godzinie wyjazdu i odprowadzeniu przez opiekuna na dworzec PKP w ....
- zobowiązuję się na własny koszt odebrać dziecko z obozu, po uprzednim telefonicznym powiadomieniu przez organizatorów.

podpis rodzica

*) niepotrzebne skreślić

Przed wyjazdem na obóz należy też pamiętać o zebraniu danych osobowych i kontaktowych nauczycieli, szkół i rodziców, w tym numerów PESEL rodziców i ucznia (będą potrzebne, gdy konieczna okaże się interwencja lekarska).

Tematyka

Tematyka obozu może być monograficzna lub przeglądowa, pozaszkolna lub rozszerzająca działy omawiane w szkole. W zimie dla młodzieży licealnej organizujemy zazwyczaj obozy monograficzne. Z naszych doświadczeń wynika, że znacznie więcej uporządkowanej wiedzy zostaje im wtedy w głowach. Natomiast na obozach letnich (dla uczestników znacznie różniących się wiekiem, wiedzą i doświadczeniem) proponujemy raczej swoisty „bigos matematyczny". Takie zajęcia na dłuższą metę są mniej nużące, choć w głowach zostają wtedy na ogół jedynie wspomnienia najciekawszych zdarzeń, zajęć, konkursów czy zadań.

Najważniejsze jest, aby zajęcia obozowe zawsze były ciekawe, by pasjonowały uczniów i przekonały, że warto było pojechać na obóz, że równie ciekawie będzie za rok i na pewno warto polecić wyjazd młodszym kolegom. Nie ukrywamy, że spora część uczestników naszych obozów podejmuje później studia w naszym Instytucie i to z nich rekrutuje się w znacznej mierze studencka kadra obozowa na kolejne lata.

Oto przykładowa monograficzna tematyka obozów dla szkół ponadpodstawowych:

- teoria grafów,
- przestrzenie metryczne,
- konstrukcje geometryczne,
- matematyka finansowa,
- równania funkcyjne,
- stożkowe i kwadryki,
- geometrie nieeuklidesowe,
- trygonometria,
- rekurencja,
- liczby zespolone,
- średnie,
- krzywe,
- kombinatoryka w geometrii,
- teoria liczb,
- geometria przestrzenna,
- algebra abstrakcyjna,
- równania różniczkowe,
- geometria elementarna,
- statystyka.

Organizacja życia na obozie

Na pięciodniowy obóz wybieramy co roku inny, ale niezbyt odległy rejon, aby nie tracić czasu na dojazdy (i nie podnosić kosztów; przy okazji zwróćmy uwagę, że im większa jest liczba uczestników i długość wyjazdu, tym większe są szanse na wynegocjowanie korzystnych cen w ośrodku wypoczynkowym). Na szczęście na Dolnym Śląsku atrakcyjnych miejsc nie brakuje.

Z nauką przesadzać nie można, dlatego niezależnie od pory roku w programie zawsze jest jedna całodzienna wycieczka oraz kilka popołudniowych, ognisko, zawody sportowe, obserwacje nieba itp. Schemat dnia jest taki, że do południa odbywają się wykłady, po południu – ćwiczenia i konkursy (mecz matematyczny, maraton zadaniowy), wieczorem zaś – warsztaty (pracownia modelarska, ksiuty matematyczne, czyli lżejsze formy pracy). Po obiedzie jest zawsze kilkugodzinna przerwa, którą uczniowie mogą przeznaczyć na wspólne spacery po okolicy, rozgrywki sportowe, rozwiązywanie zadań z ligi lub inne formy relaksu (np. basen lub narty – w zależności od pory roku i infrastruktury ośrodka).

Przykładowy rozkład obozowego dnia wygląda tak:

- 8.30–9.00 śniadanie
- 9.00–10.30 wykład 1
- 11.00–12.30 wykład 2
- 13.00–13.30 obiad
- 14.00–16.00 zajęcia opcjonalne: miniwycieczka, zajęcia sportowe, rozwiązywanie zadań ligowych
- 16.00–17.00 ćwiczenia 1
- 17.30–18.30 ćwiczenia 2
- 18.30–19.00 kolacja
- 19.00–20.00 czas wolny
- 20.00–21:30 warsztaty łamigłówkowe, modelarskie, krajoznawcze, ksiuty matematyczne
- 22.00–24.00 czas wolny, zajęcia świetlicowe, rozwiązywanie zadań ligowych
- 24.00 – cisza nocna w części mieszkalnej
- 2.00 – bezwzględna cisza nocna

Nietypowe formy pracy

Na obozach zawsze prowadzona jest **liga zadaniowa** (niekoniecznie związana z tematyką obozu). Jeśli uczestnicy są w różnym wieku, najlepiej sprawdza się liga łamigłówkowa z tymi samymi zadaniami dla wszystkich kategorii wiekowych, ale z rozłączną klasyfikacją. Oto przykładowy regulamin obozowej ligi zadaniowej, który może być modyfikowany w zależności od sytuacji.

1. Zadania ligowe pojawiają się każdego dnia dwukrotnie – o świcie i o zmierzchu.
2. Uczniowie SP rozwiązują zadania o numerach dających z dzielenia przez 3 resztę 1, uczniowie GIM – resztę 1 i 2, a uczniowie szkół LO – 0, 1 i 2.
3. Zadania można składać o dowolnej porze dnia i nocy do koperty na drzwiach pokoju XX.
4. Każde zadanie oceniane jest zero-jedynkowo, a wynik ten jest mnożony przez współczynnik tempa rozwiązania (będący różnicą liczby 5 i liczby dni od ogłoszenia zadania) oraz współczynnik trudności zadania (będący odwrotnością liczby osób, które aktualnie rozwiązały to zadanie).

5. Przyjmowane są tylko prace indywidualne, ale zachęcamy do kooperacji podczas rozwiązywania zadań.
6. W sprawach nieuregulowanych niniejszym regulaminem głos decydujący ma jury obozowej ligi zadaniowej.

Żaden obóz nie może się obejść bez **wycieczki krajoznawczej** (do wyjść w góry przyda się student z uprawnieniami przewodnika turystycznego). Dobrze gdyby to była wycieczka związana z matematyką lub techniką (np. do skansenu ginących zawodów, muzeum papiernictwa, huty szkła lub stanowiska kwitnącej rośliny zwanej liczydłem górskim itp.). Niezbędne jest wcześniejsze rozpoznanie terenu, jego historii i ciekawostek (na miejscu lub za pośrednictwem internetu). Uczniowie także powinni być do wycieczki przygotowani, a to wcześniejszą pogadanką, prezentacją multimedialną, spotkaniem z ciekawym człowiekiem z okolicy itp. Dzięki temu będą bardziej zainteresowani celem wycieczki, bardziej zaangażowani emocjonalnie, świadomie będą uczestniczyć w zwiedzaniu różnych obiektów i znacznie więcej zostanie im w głowach. Efektywność wiedzy zdobywanej na wycieczkach podnoszą zwiady krajoznawcze, przeprowadzane zawsze w grupach (tak jest bezpieczniej, a uczniowie w grupie czują się pewniej w kontaktach z obcymi ludźmi) i podsumowywane podczas zajęć wieczornych. Zazwyczaj miejscowi chętnie uczniom pomagają i odpowiadają na ich pytania, choć czasem są zawstydzeni, że tak niewiele o swoim mieście wiedzą i odsyłają młodzież do informacji turystycznej.

Tak może wyglądać przykładowe zadanie na zwiad mające formę uzupełnianki.

Pałac w Miliczu wzniesiono w stylu .... (klasycystycznym). Wzorowano go na pałacu w .... (Poczdamie).

Obecnie jest on siedzibą .... (Zespołu Szkół Leśnych). Sala balowa pod kopułą ma kształt .... (elipsy), której dłuższa oś jest skierowana w kierunku .... (wschód-zachód). Park pałacowy jako pierwszy na Śląsku założono w stylu .... (angielskim). Dąb na polanie przed pałacem ma obwód .... (694 cm) i liczy około .... (290–390) lat. Pobliski kościół pw. .... (św. Andrzeja Boboli) zbudowano w konstrukcji .... (szachulcowej).

To jeden z sześciu na Śląsku kościołów .... (łaski). Były one dowodem łaski .... (cesarza Austrii) dla śląskich .... (ewangelików).

Inne zadanie na wieczór podsumowujący wycieczkę krajoznawczą może polegać na zapoznaniu się poszczególnych grup z jakąś miejscową legendą. Następnie grupy kolejno przedstawiają swoje legendy w formie pantomimy lub komiksu, a potem na tej podstawie kolejna grupa próbuje tę legendę opowiedzieć. Na koniec grupa prezentująca podaje oryginalną wersję.

Oto przykład takiej legendy.

W miejscu, gdzie dziś stoi milicki pałac, rósł niegdyś gęsty bór, a w nim olbrzymi dąb, z którym związane były tajemne moce. Dlatego nazwano go Diabelskim Dębem. Pewnej nocy przez bór przechodziło trzech mężczyzn. Byli mocno podpici i zmierzali do domu. Zrobiło się późno, ale dwóch wolało nadłożyć drogi, aby ominąć osławiony dąb. Trzeci nie bał się niczego, był znanym kpiarzem i prześmiewcą. W równym stopniu lekceważył i boga, i diabła. Ten poszedł drogą na skróty. Kiedy przechodził w pobliżu dębu, klnąc i pomstując, nagle w koronie coś zaczęło się dziwnie poruszać, niesamowity wicher zaczął dąć dookoła prastarego drzewa i porywał wszystko, co znalazło się w jego zasięgu. Także i kpiarz został porwany i wzniesiony przez wichurę wysoko w powietrze. Jego dwaj koledzy usłyszeli tylko z dala wrzask i nieziemski śmiech, który dochodził z wnętrza dębu. Przestraszeni popędzili do domu. Następnego dnia okoliczni mieszkańcy odkryli, że tajemniczy wicher zrzucił wesołka trzy mile od starego dębu, na przykościelnym cmentarzu. Nieszczęśnik, upadając na ziemię, złamał sobie nogę i trzy żebra. Od tego czasu stał się pobożny, zaczął chodzić do kościoła i nigdy już nie bluźnił.

Wieczorne ksiuty z matematyką to interdyscyplinarne zajęcia łączące matematykę z innymi dziedzinami wiedzy (np. matematyczny wieczór muzyczny albo plastyczny, literacki, filmowy, podróżniczy, mitologiczny, lingwistyczny, historyczny, przyrodniczy) lub warsztaty (matematycznego origami, wyszywanek lub modelarskie, bryły można budować z siatek, z rurek do napojów, wyciorów do fajek lub tworzyć z mydlin). Takie wieczory pozwalają w luźnej atmosferze zakończyć dzień obozowej pracy, integrują grupę, a jednocześnie rozwijają kreatywność i wyobraźnię oraz uczą wielu matematycznych ciekawostek. Na ogół mają formę rywalizacji między mniejszymi grupami uczniów. Poniżej prezentujemy wybrane materiały z wieczoru sprytnych rachunków. Zadania rozwiązywane są w grupach. Potrzebne są: papier, ołówki, kalkulatory.

Zad. 1. Jakie cyfry powinny oznaczać symbole: $\square$, Δ, Γ i [, aby prawdziwa była równość:
$\square\square\square\square - \Delta\Delta\Delta + \Gamma\Gamma - [= 1234$?

Zad. 2. Uzupełnij wyrażenie 1111111, używając tylko znaków działań i nawiasów, tak aby jego wartość była:
a) równa 35;
b) jak największa.

Zad. 3. a) Jaka jest ostatnia cyfra liczby 9^{48}? b) Czy liczba $a=3^{24}-11^3$ jest podzielna przez 10?

Zad. 4. Liczby 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36 wpisz w pola kwadratu o wymiarach 3×3, tak aby suma liczb we wszystkich wierszach, kolumnach i przekątnych była taka sama.

Zad. 5. Uprość ułamek: $\dfrac{1\cdot2\cdot3+2\cdot4\cdot6+4\cdot8\cdot12+7\cdot14\cdot21}{1\cdot3\cdot5+2\cdot6\cdot10+4\cdot12\cdot20+7\cdot21\cdot35}$

Zad. 6. Co rozpoczyna, a co kończy alfabetyczny spis liczebników od 1 do 100 w języku polskim, a co w języku angielskim?

Zad. 7. Zapisz liczbę 6, używając znaków działań oraz kolejno trzech zer, trzech jedynek itd. aż do trzech dziewiątek. Czas 7 minut. Wygrywa drużyna, która pierwsza skończy.

Zad. 8. Dobrze byłoby poprzedzić to zadanie indukcyjnym „dowodem” faktu, że każda liczba naturalna jest interesująca oraz anegdotą o Ramanujanie (patrz: Michał Szurek „Opowieści matematyczne”, WSiP 1987) tłumaczącą, skąd się wzięły w matematyce liczby taksówkowe. Następnie losujemy liczby dla poszczególnych grup (np. grając w marynarza). Grupy mają za zadanie przygotować i przeprowadzić wywód uzasadniający, że ich liczba jest najbardziej interesująca. Wypowiedzi przedstawicieli poszczególnych grup ocenia jury.

Zad. 9. Za pomocą trzech czwórek, znaków działań i innych tricków zapisz jak najwięcej kolejnych liczb naturalnych. Czas 10 minut. Wygrywa drużyna, która zapisała w tym czasie najdłuższy ciąg liczb.

Zad. 10. Ustaw w porządku rosnącym następujące liczby: $19!^{98!}$, $1998!$, 1^{998}, 19^{98}, 1998, 199^8, $19!98!$, $199!^8$. Czas 10 minut. Wygrywa najszybsza drużyna.
Odpowiedź: $1^{998} < 1998 < 199^8 < 19^{98} < 19!98! < 199!^8 < 1998! < 19!^{98!}$
Przykładowe uzasadnienie: $199^8 < 19^{98}$, bo: $199^8 < 200^8 < 225^8 < (15^2)^8 = 15^{16} < 19^{16} < 19^{98}$.

Zad. 11. Jaki jest następny wiersz w poniższej tablicy liczb? Czy w tym ciągu liczb może wystąpić 4? Czy ciąg jest okresowy? Czy wiersze mogą być dowolnie długie? Czy ciąg jest monotoniczny? Wygrywa najszybsza drużyna. Następnie należy wymyślić podobne zadanie, jak najbardziej zaskakujące. Pomysły ocenia jury. Do sprawdzania można użyć komputera.
1
11
21
111221
312211

Zad. 12. Wymyśl nazwę i definicję liczby, której nazwę wylosowałeś. Podaj przykłady i własności. Pomysły ocenia jury.
- liczba z jajami – tylko pierwsza i ostatnia cyfra są niezerowe,
- liczba im. Gustawa Morcinka – suma cyfr jest parzystą wielokrotnością siódemki, np. 95710767,
- liczba policyjna – pewne jej kolejne trzy cyfry to 997,
- liczba z czkawką – w jej rozwinięciu dziesiętnym pewna grupa cyfr powtarza się nieskończenie wiele razy,
- liczba typu $\chi_{(7,5,5)}$ – siódma potęga tej liczby ma w swoim zapisie pięć piątek,
- liczba specjalna – ma tyle samo dzielników naturalnych co cyfr, np. 37, 121, 184093; nie mylić z liczbą specjalnej troski, która ma tylko jeden dzielnik naturalny; jest to oczywiście szczególny przypadek liczby specjalnej.

Logiczna gra terenowa „Polowanie na skarb". Jest to tradycyjna forma wieczornej rozrywki na naszych obozach matematycznych. W najbliższej okolicy miejsca zamieszkania ukryty jest skarb (zazwyczaj tort lub worek krówek) oraz różne wiodące do niego wskazówki. Poszukiwacze dzielą się na grupy i po zapoznaniu z regułami gry otrzymują pierwszą informację. Wszystkie grupy mogą mieć do pokonania tę samą trasę, ale kolejność wskazówek może być inna. Można też przygotować rozłączne trasy dla różnych grup, spotykające się u celu. Wskazówki są umieszczone na małych karteczkach, w miejscach, gdzie raczej trudno je znaleźć przez przypadek. W trakcie gry, jeśli trasy są wspólne dla kilku grup, znalezione karteczki z informacjami muszą zostać zwrócone na swoje miejsca, a jeśli trasy są rozłączne – muszą zostać zebrane, a po złożeniu wszystkich w całość pojawi się dodatkowa informacja.

Treść poszczególnych wskazówek wiodących do skarbu jest ściśle związana z charakterystycznymi miejscami, przedmiotami, sytuacjami i skojarzeniami obozowymi. Odtwarzanie w tym miejscu przebiegu całego polowania nie ma większego sensu, gdyż podane informacje byłyby niezrozumiałe. Poszczególne wskazówki mają charakter zagadek logicznych, krzyżówek matematycznych z hasłem, rebusów, szarad itp. Oto kilka przykładów.

Szukasz wody, we mnie woda
taka moja już uroda
Przyjdź do źródła, do ruczaju
a dostaniesz, ryju, czaju
czajnik elektryczny w samoobsługowej kuchni

Skarb jest tam, gdzie kończy
każdy mózgu pracz
a gdy już dowiesz się, kto zacz,
wywróć to na lewą stronę
i Twoje zadanie spełnione
wnętrze wersalki w pokoju studentów
prowadzących zajęcia na obozie

Nie po polsku ani rusku
idź, gdzie rośnie odgłos plusku
śliwa [PLUM] w ogrodzie

Skojarzenie Johna Smitha na widok
Groźnego Iwana
O klucz do skarbu poproś
pewnego brodatego pana
samochód (CAR) jednego z nauczycieli

Gdzie szum wodospadu się toczy, patrz sobie
głęboko w oczy
Pozostań tam chwilę bez mała, spójrz tak,
jak Alicja spojrzała
odwrotna strona lustra

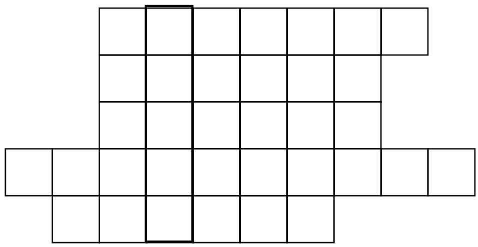
Poszły konie po betonie, a karasie po …..
taras ośrodka

Szukaj uważnie, jeśliś nie knypek
kędy do pracy wychodził skrzypek
wejście na dach

Idź do μ●● $(\sqrt{-1})$’ ✓(2,718281... := y)
podaruj jej π◯ν✓ i masło
a ona Ci poda następne hasło
mi, koła, j, czyk, pi, er, ni, czek

A kiedy przed wami zmyka,
Zatańczcie mu walczyka.
portier

1. Bywa Newtona.
2. Z wykrzyknikiem.
3. Płyną do plusa.
4. Koła być nie może.
5. W nim licznik.
winda



Czwarta z trzecią – rylcem pisane, bez podpuchy.
Pierwsza wstecz i czwarta – gdy ktoś nie jest suchy.
Drugą z pierwszą – baca mówi, gdy robi stuk-puk.
Całość mocno grzeje, a kurz to jest jej wróg.
komputery

Zamiast zakończenia

Nie sposób w krótkim opracowaniu opisać wszystkich pomysłów na zajęcia i podać zbyt wielu przykładów obozowych aktywności. Mamy nadzieję, że kilka, które tu przytoczyliśmy, stanie się inspiracją dla wielu nauczycieli. Materiały z naszych obozów naukowych (referaty, warsztaty, zadania ligowe i ksiuty) są wydawane w zeszytach Koła Naukowego Matematyków Specjalności Nauczycielskiej na UWr.

Obóz naukowy jest poważnym przedsięwzięciem dydaktycznym i logistycznym i aby był udany, wymaga długich i starannych przygotowań. Nie warto jednak planów układać zbyt sztywno, gdyż mogą je zniweczyć choćby trudne do przewidzenia warunki pogodowe. Przy planowaniu zajęć zakładajmy więc sporą dozę elastyczności, bądźmy gotowi na kompromisy i niespodzianki. Pamiętajmy, że zawsze możemy też liczyć na niczym nieograniczoną inwencję naszych uczniów.

7. Uczeń zdolny pod katedrą

Jacek Dymel, Kraków

Szczególną rolę w kształceniu uczniów o wybitnych uzdolnieniach matematycznych odgrywa ich kontakt ze środowiskiem akademickim. Pracownicy naukowi wielu uczelni zajmują się wyszukiwaniem i szlifowaniem odkrytych talentów. Potencjał intelektualny i dydaktyczny polskich badaczy jest wykorzystywany w pracy z uczniami szkół wszystkich szczebli, a prowadzone przez nich wykłady, ćwiczenia i warsztaty są doskonałym dopełnieniem codziennej pracy nauczyciela. W artykule przedstawiamy wybrane inicjatywy polskich wyższych uczelni w zakresie popularyzacji matematyki wśród dzieci i młodzieży oraz pracy z uczniami uzdolnionymi matematycznie.

Na styku szkoły z akademią

Kontakt uczniów z naukowcami w salach wykładowych i laboratoriach uniwersytetów jest ważny (i to dla obu stron) już od najmłodszych lat. Uczniom daje okazję do chłonięcia niezwykłej uniwersyteckiej atmosfery intelektualnej swobody, twórczej pracy i badawczej kooperacji, wprowadza ich w świat w szkole niespotykany, specyficzny i tajemniczy, ale niezwykle pociągający. Badaczom z kolei pozwala utrzymać stały kontakt ze środowiskiem szkolnym i na bieżąco śledzić zachodzące w nim zmiany, co ułatwia prowadzenie zajęć dydaktycznych ze świeżo upieczonymi studentami, a także dostosowanie programów studiów do potrzeb i możliwości rynku edukacyjnego.

Działalność środowiska akademickiego na rzecz uczniów przebiega dwutorowo. Z jednej strony jest to popularyzacja wiedzy adresowana do szerokich rzesz młodzieży, a z drugiej – działania podejmowane w celu wyławiania i rozwijania talentów uczniów o wybitnych uzdolnieniach kierunkowych. Popularyzacja odgrywa w realizacji tego celu niezwykle ważną rolę, gdyż niejednokrotnie pozwala zainteresować matematyką uczniów negatywnie do niej nastawionych, którzy bez tego mogliby nie rozpoznać właściwie swoich uzdolnień. Szczególnie ważna jest popularyzacja osiągnięć współczesnych nauk podstawowych i pokazanie ich aplikacyjnego charakteru, a także głęboko kultywowana więź historyczna i przypominanie dokonań polskich badaczy, którymi na polu matematyki możemy się szczycić na skalę światową.

Formy współpracy

Działalność popularyzatorska na różnych uczelniach przyjmuje różne formy. Do najczęściej spotykanych należą:

- uniwersytety dziecięce – adresowane do uczniów szkół podstawowych,
- festiwale nauki i pikniki naukowe – adresowane do uczniów w każdym wieku, ich nauczycieli i rodziców,
- wystawy, muzea i interaktywne parki wiedzy,

• cykliczne wykłady popularnonaukowe,
• portale i czasopisma popularnonaukowe.

W zakresie rozwijania talentów uczniów wybitnie uzdolnionych działalność środowisk akademickich przejawia się między innymi w:

• prowadzeniu kółek olimpijskich,
• możliwości konsultowania własnych prac badawczych przez uczniów,
• indywidualnej opiece nad uczniami uzdolnionymi,
• możliwości uczestniczenia w wybranych zajęciach akademickich na prawach wolnego słuchacza.

Uniwersytety dziecięce

U podstaw uniwersytetów dziecięcych leży przekonanie o potrzebie nieustannego rozwijania twórczego i intelektualnego potencjału dzieci poprzez zapoznawanie ich z tematyką naukową niedostępną w nauczaniu szkolnym. Dzieci od najmłodszych lat zadają pytania, pokazując, co je najbardziej ciekawi. Tę naturalną ciekawość można i należy wykorzystać, a szkoła nie zawsze potrafi temu zadaniu sprostać, realizując wytyczone programy i nakazując opanowanie reguł i algorytmów. Chciałoby się tymczasem, aby ktoś poważnie potraktował pytania rodzące się w głowach dzieci, udzielając na nie jasnych, ale i fachowych odpowiedzi. Poprzez taki żywy kontakt z nauką dzieci odkrywają własne pasje oraz potrzebę zrozumienia świata, w którym żyją, i skutecznego podejmowania działań, co w przyszłości pozwoli im wykorzystać drzemiące w nich siły dla dobra ludzi.

Uniwersytety dziecięce w swoich formach organizacyjnych są zbliżone do prawdziwych uczelni. Ich słuchacze (w wieku 6–13 lat) noszą miano studentów, legitymują się indeksami i uczęszczają na wykłady i pokazy dotyczące wielu dziedzin nauki prowadzone przez pracowników prestiżowych wyższych uczelni. Podczas zajęć wspólnie poszukują odpowiedzi na nurtujące dzieci pytania. Efektem takiego podejścia jest motywowanie najmłodszych do pogłębiania zainteresowań nauką i świadomego korzystania z jej zdobyczy w życiu codziennym.

Idea uniwersytetów dziecięcych narodziła się w akademickiej Tybindze w Niemczech, gdzie w czerwcu 2002 roku profesor Gregor Merkel wygłosił wykład dla dzieci pt. „Dlaczego wulkany zieją ogniem". W ten sposób zapoczątkował istnienie Uniwersytetu Dzieci w Tybindze. Szybko ideę tę podjęły uniwersytety w Szwajcarii, Austrii i Lichtensteinie, a potem w Wielkiej Brytanii, USA, na Wyspach Kanaryjskich i w Słowenii. Obecnie w samych Niemczech uniwersytety dziecięce działają w ponad 70 ośrodkach akademickich, jednak w przeciwieństwie do Polski, są to na ogół przedsięwzięcia bezpłatne, utrzymujące się z grantów na popularyzację wiedzy.

Najprężniej dziś działający w Europie Uniwersytet Dziecięcy znajduje się w Wiedniu (www.kinderuni.at) i z jego inicjatywy powstała organizacja EUCUNET (*European Union Children University Network*) zrzeszająca uniwersytety dziecięce z całego świata oraz jej portal internetowy www.eucu.net. Tam można znaleźć informacje dotyczące tego typu przedsięwzięć.

Najstarszą taką placówką w Polsce jest Uniwersytet Dzieci (www.uniwersytetdzieci.pl) prowadzony przez Fundację Paideia, działający obecnie w czterech ośrodkach akademickich: Krakowie, Warszawie, Olsztynie i Wrocławiu. Powszechnie dostępny jest jego portal edukacyjny, a w nim kluby naukowe, czyli kilkaset miniserwisów tematycznych, w których każdy może rozwijać swoje zainteresowania oraz dzielić się swoją pasją i wiedzą z innymi użytkownikami. Wykłady i warsztaty odbywają się w weekendy w siedzibach prawdziwych uniwersytetów i ośrodków naukowych oraz w miejscach zwykle dla dzieci niedostępnych, takich jak obserwatoria astronomiczne, laboratoria diagnostyczne, stacje badawcze, banki czy drukarnie.

Działalności Uniwersytetu Dzieci w poszczególnych miastach patronują:

- w Krakowie – Uniwersytet Jagielloński, Akademia Górniczo-Hutnicza, Uniwersytet Rolniczy i Uniwersytet Ekonomiczny,
- w Warszawie – Politechnika Warszawska, Uniwersytet Warszawski i Akademia Pedagogiki Specjalnej,
- we Wrocławiu – Uniwersytetu Wrocławski i Politechnika Wrocławska,
- w Olsztynie – Uniwersytet Warmińsko-Mazurski.

Ponadto w EUCUNET zrzeszone są:

- Łódzki Uniwersytet Dziecięcy (www.lud.p.lodz.pl),
- Dziecięca Politechnika Opolska (www.dpo.po.opole.pl),
- Małopolski Uniwersytet dla Dzieci (www.uniwersytetdladzieci.edu.pl),
- Uniwersytet Dziecięcy „Unikids" (www.unikids.pl) działający w następujących miastach: Bielsko-Biała, Kielce, Kędzierzyn-Koźle, Gorzów, Lublin, Zielona Góra, Gliwice, Legnica, Namysłów, Brzeg, Trójmiasto, Katowice, Jaworzno, Bytom, Częstochowa, Lubin, Polkowice, Sosnowiec, Rybnik, Wałbrzych, Głogów, Kartuzy i Kalisz;

a poza strukturami EUCUNET funkcjonują w Polsce:

- Ekonomiczny Uniwersytet Dziecięcy (www.uniwersytet-dzieciecy.pl) w Warszawie (pod patronatem SGH), Katowicach, Białymstoku, Poznaniu i Kielcach,
- Uniwersytet Dziecięcy w Bydgoszczy (www.ud.utp.edu.pl),
- Polska Akademia Dzieci (www.akademiadzieci.wordpress.com) w Krakowie, Trójmieście, Poznaniu i Bydgoszczy,
- Uniwersytet „Śląskie Dzieci" w Katowicach (www.dzieci.us.edu.pl),
- Białostocki Uniwersytet Dziecięcy (www.pb.edu.pl/bialostocki-uniwersytet-dzieciecy.html),
- Koszaliński Uniwersytet Dziecięcy (www.tu.koszalin.pl/?kategoria=Koszali%C5%84ski_Uniwersytet_Dzieci%C4%99cy).

Festiwale nauki

W 1988 roku w Edynburgu po raz pierwszy odbył się Science Festival (www.sciencefestival.co.uk), który zapoczątkował modę na festiwale nauki w nowoczesnej formie na całym świecie. W Polsce pierwszym festiwalem był Festiwal Nauki w Warszawie, który w roku 2011 obchodził swoje 15-lecie.

Celem festiwali jest prezentacja osiągnięć współczesnej nauki w formie przystępnej i atrakcyjnej dla laików, rozwijanie ciekawości świata i radości z jego poznawania. Hasło festiwalu warszawskiego: *Brak inwestycji w naukę, to inwestycja w ignorancję*, oddaje znaczenie takich działań nie tylko w skali jednostek, ale całych społeczeństw. Od poziomu wykształcenia oraz stopnia rozwoju badań naukowych zależą bowiem losy młodego pokolenia (czy odnajdzie się w zmieniającym i rozwijającym się z zawrotną szybkością świecie?) i kraju.

W Polsce festiwale nauki odbywają się raz w roku i trwają kilka dni, podczas których uczestnicy mogą brać udział w wykładach, warsztatach, pokazach, eksperymentach laboratoryjnych, panelach dyskusyjnych, konkursach i wystawach. Najczęściej są organizowane przez środowiska międzyuczelniane z danego regionu.

Przedstawiają szerokie spektrum wiedzy, nie koncentrują się na jednej dziedzinie, ale pokazują związki między różnymi naukami. Zestawienie festiwali nauki, ich stron internetowych oraz terminów prezentuje poniższa tabela.

nazwa	**strona www**	**termin**
Poznański Festiwal Nauki i Sztuki	www.festiwal.amu.edu.pl/	marzec/kwiecień
Festiwal Nauki, Techniki i Sztuki w Łodzi	www.festiwal.lodz.pl	kwiecień
Toruński Festiwal Nauki	www.festiwal.torun.pl	kwiecień
Bałtycki Festiwal Nauki	www.festiwal.gda.pl	maj
Opolski Festiwal Nauki	www.festiwal.po.opole.pl	maj
Beskidzki Festiwal Nauki i Sztuki	www.festiwal.ath.bielsko.pl	maj
Bydgoski Festiwal Nauki	www.festiwal.ukw.edu.pl	maj
Podlaski Festiwal Nauki i Sztuki	www.festiwal.pb.edu.pl	maj
Festiwal Nauki w Krakowie	www.festiwalnauki.ur.krakow.pl	maj
Festiwal Nauki w Zielonej Górze	www.fn.uz.zgora.pl	czerwiec
Festiwal Nauki w Warszawie	www.festiwalnauki.edu.pl	wrzesień
Dolnośląski Festiwal Nauki	www.festiwal.wroc.pl	wrzesień – Wrocław październik – Legnica, Jelenia Góra, Wałbrzych, Ząbkowice Śląskie, Bystrzyca Kłodzka
Lubelski Festiwal Nauki	www.festiwal.lublin.pl	wrzesień
Kielecki Festiwal Nauki	www.kfn.ujk.edu.pl	wrzesień
Nyski Festiwal Nauki	www.pwsz.nysa.pl/nfn_2011	wrzesień
Olsztyńskie Dni Nauki i Sztuki	www.odn.uwm.edu.pl	wrzesień
Zachodniopomorski Festiwal Nauki	www.stn.bg.szczecin.pl	wrzesień
Festiwal Nauki i Sztuki w Siedlcach	www.festiwal.ap.siedlce.pl	październik

A oto jeszcze kilka imprez, które formalnie festiwalami nauki nie są, ale mają podobny charakter i są godne polecenia.

Podlaskie Dni Matematyki – Białystok	www.katmat.pb.bialystok.pl/dni2011/	nieregularnie
Święto Liczby Pi – Kielce	www.matematyka.ujk.edu.pl	marzec
Dzień Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie	www.dw.matinf.uj.edu.pl/	marzec
Piknik Naukowy PR i CNK – Warszawa	www.pikniknaukowy.pl/	maj
Interaktywny Piknik Wiedzy – Rzeszów	www.dzienodkrywcow.pl/	czerwiec

Interaktywne centra nauki

Osobną kategorię działań wyznaczają centra nauki, czyli interaktywne muzea, w których prawa przyrody, twierdzenia matematyczne, osiągnięcia nauki i zdobycze techniki może poznać przez osobiste doświadczenie. Oprócz wystaw stałych i czasowych odbywają się tam również lekcje i warsztaty muzealne, wykłady oraz spotkania z naukowcami dla uczniów i nauczycieli.

Odwiedzanie takich miejsc w czasie szkolnych wycieczek pomaga zainteresować uczniów naukami ścisłymi, może być także inspiracją do samodzielnej pracy badawczej. Podobną rolę pełnią też muzea techniki lub planetaria znajdujące się w wielu miastach (piszemy o nich w następnym rozdziale *Poradnika*).

Najnowszym, największym i najbardziej znanym obiektem tego typu w Polsce jest Centrum Nauki „Kopernik" w Warszawie (www.kopernik.org.pl). Poniżej przedstawiamy listę takich obiektów z innych miast.

- Centrum Nauki „Hewelianum" w Gdańsku (www.hewelianum.pl),
- Centrum Nauki „Eksperyment" w Gdyni (www.experyment.gdynia.pl),
- Ogród Doświadczeń im. Stanisława Lema w Krakowie (www.ogroddoswiadczen.pl),
- Świat zmysłów, Muzeum Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie (www.maius.uj.edu.pl/zmysly),
- Wokół koła. Muzeum Inżynierii Miejskiej w Krakowie (www.mimk.com.pl),
- Centrum Nauki „Experymentarium" w Łodzi (www.experymentarium.pl),
- Eureka. Cuda techniki i nauki w Szczecinie (www.eureka.univ.szczecin.pl),
- Centrum Nauki „ExploraPark" w Wałbrzychu (www.explorapark.pl),
- Centrum Naukowe „Ogrody Doświadczeń" we Wrocławiu (www.humanitarium.pl).

Kolejne powstaną wkrótce w Katowicach i Toruniu. I jeszcze kilka obiektów położonych w pobliżu granic z Polską (z niektórych rejonów jest tam bliżej niż do Warszawy):

- Centrum Nauki „IQ Park" w Libercu, Czechy (www.iqpark.cz),
- Centrum Nauki „Spectrum". Muzeum Techniki w Berlinie, Niemcy (www.sdtb.de/Spectrum),
- Kraina przygód matematycznych. Muzeum Techniki w Dreźnie, Niemcy (www.math.tu-dresden.de/alg/erlebnisland/pl),
- Salon Matematyczno-Fizyczny. Galeria Zwinger w Dreźnie, Niemcy (www.skd.museum/en/museums-institutions/zwinger-with-semperbau/mathematisch-physikalischer-salon),
- Centrum Nauki „Phänomenta" w Peenemünde, Niemcy (www.phaenomenta-peenemuende.de).

Wykłady popularnonaukowe

W wielu ośrodkach akademickich odbywają się cyklicznie wykłady popularyzujące matematykę. Oto (zapewne niepełna) lista godnych polecenia zajęć.

- **Matematyczne Czwartki** (www.im.uj.edu.pl/du/matematyczne-czwartki) to wykłady dla uczniów klas licealnych; odbywają się w Instytucie Matematyki UJ w Krakowie (ul. Łojasiewicza 6) w pierwszy lub drugi czwartek miesiąca o 12.15.
- **Wykłady dla uczniów zainteresowanych matematyką** (www2.im.uj.edu.pl/ptm/popularyzacja) to spotkania adresowane do uczniów wszystkich typów szkół; odbywają się raz w miesiącu w czwartki o 17.30 na Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie (ul. Podchorążych 2).
- **Spotkania z Matematyką** (www.wmii.uwm.edu.pl/index.php?content=szkoly) to zajęcia dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych; odbywają się we wtorki o 16.30 w Olsztynie na Uniwersytecie Warmińsko-Mazurskim (ul. Żołnierska 14).
- **Po indeks z Pitagorasem** (www.web.wmi.amu.edu.pl) to wykłady dla gimnazjalistów i uczniów szkół ponadgimnazjalnych; odbywają się raz w miesiącu we wtorki o 12.00 na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza w Poznaniu.

- **Wykłady Popularne z Matematyki** (www.csz.pw.edu.pl/index.php/pl/dla-uczniow) są adresowane do licealistów, nauczycieli, studentów kierunków ścisłych i wszystkich innych zainteresowanych; odbywają się raz w miesiącu w czwartki o 16.00 na Politechnice Warszawskiej (pl. Politechniki 1).
- **Mini Akademia Matematyki** (www.akademia.mini.pw.edu.pl) – zajęcia są adresowane do uczniów szkół ponadgimnazjalnych, nauczycieli i pasjonatów matematyki; odbywają się raz w miesiącu na Politechnice Warszawskiej (pl. Politechniki 1).
- **Wrocławskie Spotkania Matematyczne** (www.fmw.uni.wroc.pl, zakładka: Dla uczniów > Spotkania Matematyczne) to wykłady dla licealistów, studentów i nauczycieli; odbywają się od 20 lat(!) raz w miesiącu w soboty o 10.15 w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego (pl. Grunwaldzki 2/4).
- **Wykłady z matematyki** (www.spinor.edu.pl/wyklady) to wykłady w Pracowni Matematyki Pałacu Młodzieży w Katowicach (ul. Mikołowska 26).

Portale informacyjne

Nieocenionym źródłem informacji o ofercie środowiska naukowego dla uczniów są strony internetowe portalu www.math.edu.pl, Wrocławskiego Portalu Matematycznego (www.matematyka.wroc.pl) oraz Pracowni Matematyki Pałacu Młodzieży w Katowicach (www.spinor.edu.pl). Wiele istotnych informacji można znaleźć na największych polskich forach poświęconych matematyce: www.matematyka.pl oraz www.matematyka.org.

Organizacje matematyczne

Znaczącą rolę w pracy na rzecz uczniów uzdolnionych odgrywają organizacje skupiające zawodowych matematyków oraz nauczycieli matematyki.

- **Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej** (www.sem.edu.pl) – jest organizatorem Olimpiady Matematycznej oraz Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, wydaje książki i plakaty pomocne w pracy z uczniem zdolnym, prowadzi wykłady popularnonaukowe dla młodzieży i organizuje konferencje metodyczne.
- **Stowarzyszenie Nauczycieli Matematyki** (www.snm.edu.pl) – wydaje czasopisma, organizuje konferencje metodyczne.
- **Polskie Towarzystwo Matematyczne** (www.ptm.org.pl) – wspiera wydawanie czasopism popularnonaukowych, organizuje konkurs „Matematyka bez granic".
- **Krajowy Fundusz na rzecz Dzieci** (www.fundusz.org) – organizuje warsztaty, obozy naukowe, zapewnia wszechstronną opiekę nad uczniami uzdolnionymi, jest organizatorem polskich eliminacji do Konkursu Prac Młodych Naukowców Unii Europejskiej.
- **Fundacja Matematyków Wrocławskich** (www.fmw.uni.wroc.pl) – organizuje wiele regionalnych konkursów matematycznych na Dolnym Śląsku, a także między innymi Olimpiadę Lingwistyki Matematycznej i ogólnopolski konkurs matematycznego origami „Żuraw"; wspiera wydawanie czasopism popularnonaukowych, prowadzi koła matematyczne, organizuje konferencje metodyczne, obozy matematyczne i wykłady popularnonaukowe.

- **Towarzystwo Upowszechniania Wiedzy i Nauk Matematycznych** (www.kangur-mat.pl) – organizuje konkurs Kangur Matematyczny oraz Ligę Zadaniową, wydaje książki pomocnicze do matematyki i zbiory zadań.
- **Śląskie Stowarzyszenie „Delta"** (www.ssodelta.edu.pl) – organizuje międzynarodowy konkurs Pikomat, wykłady popularnonaukowe oraz wiele regionalnych konkursów matematycznych.

Kółka olimpijskie

Dla uczniów wybitnie uzdolnionych matematycznie uczelnie proponują zajęcia kół matematycznych. Poniżej znajduje się lista takich zajęć.

nazwa	organizator	strona www	poziom
Kółko zainteresowań	Pracownia Matematyki Pałacu Młodzieży w Katowicach	www.spinor.edu.pl	SP, GIM, LO
Kółko dla olimpijczyków	Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego	www.im.uj.edu.pl	SP, GIM, LO
Międzyszkolne Kółko Matematyczne	PTM, Oddział w Nowym Sączu	www.ptmso.mnet.pl/o-PTM.html	LO
Międzyszkolne Kółko Matematyczne	Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza	www.astagor.net/mkm www.kolko.edu.pl	LO
Regionalne Koło Matematyczne	Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika	www.mat.umk.pl/web/rkm	GIM, LO
Kółko matematyczne	Centrum Studiów Zaawansowanych Politechniki Warszawskiej Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej	www.csz.pw.edu.pl/index.php/pl/dla-uczniow	GIM, LO
Kółko matematyczne	Instytut Matematyczny PAN Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej	www.sem.edu.pl/materiały	GIM, LO
Międzyszkolne Kółka Matematyczne	Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego Fundacja Matematyków Wrocławskich	www.fmw.uni.wroc.pl	SP, GIM, LO

8. Matematyczne wycieczki

Małgorzata Mikołajczyk, Wrocław

Zajęcia z matematyki w terenie kojarzą się najczęściej z mierzeniem wysokości drzewa na szkolnym boisku. Rzadko zdajemy sobie sprawę, ile ciekawych miejsc można odwiedzić w ramach zajęć matematycznych i ile naprawdę matematyki i jej zastosowań znajduje się w plenerze. Wystarczy się za nimi tylko trochę rozejrzeć. W tym rozdziale piszemy o tym, jak i dokąd zaplanować matematyczną wycieczkę.

Idea podróży, nawet takiej prowadzonej przysłowiowym „palcem po mapie", jest nierozerwalnie związana z najwcześniejszymi zastosowaniami geometrii euklidesowej (podobieństwo i przedstawianie terenu w skali) oraz sferycznej (konstrukcja globusa i jego płaskich odwzorowań). Wędrówki z mapą, studiowanie map czy tworzenie planów okolicy to najbardziej praktyczne stosowanie geometrii w życiu i okazja do rozwijania geometrycznej wyobraźni (w szczególności udział w różnego rodzaju imprezach na orientację). Wycieczki do miejsc związanych z kartografią – bibliotek z bogatymi atlasami, muzeów globusów czy wydawnictw kartograficznych – mogą być wspaniałymi lekcjami poglądowej geometrii. Zapraszany więc na wędrówkę szlakiem matematycznych osobliwości.

Matematyka

W Polsce nie ma dotychczas stałego muzeum poświęconego wyłącznie matematyce, jak np. *Mathematicum* w Giessen (www.mathematikum.de), *Arithmeum* w Bonn (www.arithmeum.uni-bonn.de), Muzeum Matematyki Katalońskiej MMaCa (www.mmaca.cat) w Barcelonie czy *The Museum of Mathematics MoMa* w Nowym Jorku (www.momath.org) – każde z nich warte jest odwiedzenia chociaż raz w życiu. Najbardziej monotematycznym muzeum poświęconym matematyce (chociaż jednym z mniejszych) jest wałbrzyskie centrum nauki *ExploraPark* (http://explorapark.pl). Jednak w rozmaitych placówkach muzealnych i naukowych otwierane są coraz częściej stałe lub czasowe wystawy matematyczne (modeli wielościanów, maszyn liczących itp.). Warto śledzić takie wydarzenia w swojej okolicy i zabrać tam uczniów, aby mogli przekonać się, że matematyka może być ekscytująca dla szerokiej publiczności.

Gry i łamigłówki

Celem wycieczki mogą być też miejsca i wydarzenia związane z tzw. matematyką rekreacyjną, a badanie oglądanych tam obiektów może prowadzić do matematyki bardzo poważnej. Do tej kategorii można zaliczyć muzea gier i łamigłówek (np. Muzeum Zabawek i Zabawy w Kielcach www.muzeumzabawek.eu), targi gier i łamigłówek (np. odbywające się cyklicznie w Łodzi, Krakowie czy Poznaniu), festiwale gier logicznych, strategicznych lub planszowych oraz labirynty. Do najbardziej znanych na świecie muzeów tej branży należą: amerykańskie Narodowe Muzeum Łamigłówek w Port Clinton (www.puzzlebuffs.com/ museum), Muzeum Łamigłówek Logicznych w Burlington (www.logicpuzzlemuseum.org) oraz Szwajcarskie Muzeum Gier w La-Tour-de-Peilz (www.museedujeu.com).

W Polsce w wielu miastach odbywają się cykliczne festiwale gier planszowych, strategicznych i logicznych, np.
- Brzeski Festiwal Gier Planszowych w Brzegu (www.bfgp.pl),
- Gram-o-fun w Płocku (www.gramofun.pl),
- Gratislavia we Wrocławiu (www.gratislavia.pl),
- Kocioł w Warszawie (www.kociol.waw.pl),
- Łódzki Port Gier w Łodzi (www.smerf.fero.pl/LPG),
- Noc Planszówek w Bydgoszczy (www.pegaz-gry.pl/content/16-spotkania-z-grami-planszowymi),
- Pionek w Gliwicach (www.pionek.org),
- Poznań Game Arena w Poznaniu (www.gamearena.pl),
- Rzuć kostką w Warszawie (www.rzuckostka.blogspot.com),
- Warsaw Open w Warszawie (www.warsawopen.pl).

Natomiast informacje o cotygodniowych spotkaniach klubów gier planszowych w całej Polsce można znaleźć na stronie www.gamesfanatic.pl/gdzie-grac.

Spośród rozmaitych rodzajów labiryntów najciekawszymi rodzajami polecanymi jako cel matematycznej wycieczki są medytacyjne labirynty podłogowe (spotykane w kościołach lub na placach zabaw) wzorowane na labiryncie z katedry w Chartres pod Paryżem (www.pl.wikipedia.org/wiki/ Labirynt), labirynty ogrodowe wzorowane na labiryncie z Hampton Court pod Londynem (opisanym w prozie Jamesa Joyce'a) i labirynty lustrzane, z których największy w Europie znajduje się w IQParku w Libercu (www.centrum-babylon.cz, zakładki: Zabawa, labirynt) – jest wyjątkowo trudny do pokonania, gdyż ma trzy rodzaje ścian: ze szkła zwykłego, weneckiego oraz lustrzanego. Najbardziej znane stałe zielone labirynty w Polsce znajdują się w parkach:
- Brochowskim we Wrocławiu,
- im. Armii Krajowej w Myśliborzu,
- „Świat marzeń" w Inwałdzie (www.parkminiatur.com/zielony_labirynt),
- oraz w Niemczech, koło Zgorzelca w Kleinwelce (www.irrgarten-kleinwelka.de).

Sezonowo co rok są zakładane labirynty kukurydziane, w których dodatkową atrakcję stanowi seria zagadek logicznych do rozwiązania podczas wędrówki. Znajdują się one w:
- Pałacu w Kurozwękach k. Staszowa (www.kurozweki.nazwa.pl, zakładka: Atrakcje),
- Muzeum Narodowym Rolnictwa i Przemysłu Rolno-Spożywczego w Szreniawie k. Poznania (www.muzeum-szreniawa.pl).

Rzecz jasna przed odbyciem tego typu wycieczki warto przestudiować teorię dotyczącą konstruowania różnych rodzajów labiryntów. Wiadomości i książki na ten temat łatwo można znaleźć w Internecie. Labiryntom był też poświęcony numer 2/2009 (22) „Magazynu Miłośników Matematyki".

Nauka i technika

W Polsce powstaje coraz więcej ogrodów doświadczeń i interaktywnych muzeów nauki (piszemy o nich w poprzednim rozdziale). Każde z tych miejsc może być celem wspaniałej matematycznej wycieczki, pod warunkiem, że uczestnicy będą do niej dobrze przygotowani. Warto więc wcześniej zadać im do domu przygotowanie referatów lub multimedialnych prezentacji dotyczących zagadnień matematycznych, z jakimi spotkają się w terenie, oraz poświęcić lekcję na ich omówienie.

Centra nauki zapraszają do zabawy, ale także inspirują, skłaniają do refleksji, dostarczają naukowego gruntu dla rozwijania wyobraźni i silnych bodźców do zdobywania wiedzy. Podobną rolę pełnić mogą parki miniatur słynnych budowli świata czy regionu, które bardzo chętnie umożliwiają wizyty także w swoich pracowniach modelarskich i oglądanie „na żywo", jak powstają modele w skali. Dzięki temu zajęcia matematyczne można połączyć z historią, krajoznawstwem i techniką, a po powrocie pokusić się o realizację własnego projektu. Wśród takich miejsc warto polecić:

- Kaszubski Park Miniatur w Mirachowie (www.kaszubskiparkminiatur.pl – budowle świata i Kaszub),
- Park Miniatur „Świat marzeń" w Inwałdzie (www.parkminiatur.com – budowle świata, Małopolski i Podkarpacia),
- Park Miniatur Świątyń w Myczkowcach (www.myczkowce.org.pl – pogranicze Polski, Słowacji i Ukrainy),
- Park Miniatur Warmii i Mazur w Gierłoży (www.miniatury.com.pl),
- Park Miniatur Zabytków Dolnego Śląska w Kowarach (www.park-miniatur.com/pl),
- Park Miniatur Zabytków Podlasia w Hajnówce (www.parkminiatur-hajnowka.pl),
- Park Miniatur Zamków Jurajskich w Ogrodzieńcu (www.park-ogrodzieniec.pl),
- Skansen Miniatur w Pobiedziskach (www.ok-pobiedziska.pl/cms/230/skansen_miniatur - Wielkopolska),
- Polska i Świat w Miniaturze w Łodzi (www.parkminiatur.pl),
- Park Miniatur „Od Komorowskich do Habsburgów" w Żywcu,
- Park Miniatur Latarni Morskich w Niechorzu.

Celem matematycznych wycieczek mogą też być muzea techniki (w tym przemysłu, górnictwa, hutnictwa, energetyki, gazownictwa, rzemiosła, rolnictwa, rybołówstwa, pszczelarstwa, browarnictwa, gorzelnictwa, komunikacji, motoryzacji, lotnictwa, kolejnictwa, pożarnictwa, papiernictwa, drukarstwa, ceramiki, włókiennictwa, farmacji, ginących zawodów itp.), które znajdują się w większości większych miast. Katalog takich placówek można znaleźć na stronie www.katalog.onet.pl/11201,0,1,muzea-techniki,k.html. Zapoznając się wcześniej z ekspozycją i kontaktując z obsługą muzeum, w każdym można znaleźć wiele zagadnień dotyczących zastosowań matematyki w danej dziedzinie techniki. Szczególnie warte polecenia są:

- Muzeum Geodezji i Kartografii w Opatowie (www.muzeumgeodezji.opatow.pl),
- Muzeum Inżynierii Miejskiej w Krakowie (www.mimk.com.pl),
- Muzeum Poczty i Telekomunikacji we Wrocławiu (www.muzeum.wroclaw.pl),
- Muzeum Techniki w Warszawie (www.muzeum-techniki.waw.pl),
- zabytki i muzea na śląskim Szlaku Zabytków Techniki (www.zabytkitechniki.pl).

Astronomia

Wśród muzeów techniki na szczególną uwagę z matematycznego punktu widzenia zasługują muzea zegarów. W Polsce najważniejsze takie placówki to:
- Muzeum im. Przypkowskich w Jędrzejowie (www.muzeum.jedrzejow.pl),
- Muzeum Rzemiosł Artystycznych i Precyzyjnych w Warszawie,
- Muzeum Zegarów Wieżowych w Gdańsku (http://www.mhmg.gda.pl/index.php?oddzial=5),
- Muzeum Historyczne Miasta Krakowa (www.mhk.pl/zbiory/zegary).

Wycieczkę tropami zastosowań matematyki w astronomii można zacząć w najbliższej okolicy zamieszkania od dowolnego okazu zegara słonecznego (katalog takich zegarów w Polsce jest na stronie www.gnomonika.pl) albo mechanicznego zegara wieżowego. Niezwykle ciekawa w matematycznym kontekście jest analiza budowy i zasad działania zegara astronomicznego, niestety w Polsce jedyny okaz takiego zegara znajduje się w bazylice mariackiej w Gdańsku. Najbliższe działające zegary astronomiczne znajdują się na czeskich ratuszach (w Ołomuńcu i Pradze) lub niemieckich ratuszach (w Heilbronn i w Ulm), katedrach (w Rostocku i w Lubece) oraz zamkach (w Dreźnie).

Prostym modelem zegara słonecznego, znajdującym przede wszystkim zastosowanie jako instrument astronomiczny jest linia południkowa. Niestety, znowu jedyny taki okaz (i to nie w pełni sprawny) znajdziemy w Polsce na Wieży Matematycznej w Muzeum Uniwersytetu Wrocławskiego (www.matematyka.wroc.pl/ doniesienia/wroclawska-meridiana), a najbliższa działająca linia południkowa znajduje się w na Wieży Keplera budynku Klementinum w Pradze. Na muzea uniwersyteckie warto zwrócić uwagę także ze względu na ich bogate instrumentaria naukowe: matematyczne (np. cyrkle proporcjonalne, pomoce dydaktyczne do geometrii, maszyny liczące) i astronomiczne (np. sfery armilarne, kwadranty, astrolabia). Najciekawsze zbiory tego typu znajdują się w muzeach:
- Uniwersytetu Jagiellońskiego (www.maius.uj.edu.pl),
- Uniwersytetu Wrocławskiego (www.muzeum.uni.wroc.pl),
- Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu (www.muzeum.umk.pl),
- Uniwersytetu Warszawskiego (www.muzeum.uw.edu.pl).

Sfera armilarna i astrolabium to pierwsze modele znacznie bardziej skomplikowanych urządzeń zwanych planetariami. Współczesne planetaria są eksponowane w osobnych placówkach edukacyjnych określanych tą samą nazwą. Właśnie planetaria i profesjonalne obserwatoria astronomiczne (wszak amatorskie teleskopy są w posiadaniu wielu szkół a nawet uczniów) mogą stanowić interesujący cel matematycznej wycieczki. Największe w Polsce jest Planetarium Śląskie i Obserwatorium Astronomiczne im. Kopernika w Chorzowie (www.planetarium.edu.pl). Warto zwrócić uwagę, że posiada ono planetarium mechaniczne (nie cyfrowe) i dlatego ma szczególną wartość poznawczą, jeżeli chodzi o zagadnienia mechaniki nieba. Mniejsze planetaria mechaniczne lub zespoły planetariów i obserwatoriów astronomicznych znajdują się w następujących miejscach:

a) placówki szkolne
- Gimnazjum im. Heweliusza w Potarzycy k. Jarocina (www.planetarium-potarzyca.prv.pl),
- I LO w Piotrkowie Trybunalskim (www.planetarium.om.pl),

• Zespół Szkół Technicznych w Grudziądzu (www.grudziadz.planetarium.pl),
b) placówki uczelniane
• Akademia Morska w Gdyni, (http://www.frwsm.com.pl/planetarium.php),
• Instytut Fizyki Akademii Świętokrzyskiej w Kielcach (www.ujk.edu.pl/ifiz/za/planetarium.html),
• Instytut Nawigacji i Hydrografii Akademii Marynarki Wojennej w Gdyni (www.nawigacja.gdynia.pl),
• Instytut Nawigacji Wyższej Szkoły Morskiej w Szczecinie (www.planetarium.szczecin.pl),
c) placówki muzealne
• Muzeum Kopernika we Fromborku (www.frombork.art.pl/Pol08.htm),
• Muzeum Techniki w Warszawie (www.muzeum-techniki.waw.pl/educd/index.php?page=planetarium),
d) placówki samodzielne
• Młodzieżowe Obserwatorium Astronomiczne w Niepołomicach (www.moa.edu.pl),
• Planetarium i Obserwatorium Astronomiczne w Łodzi (www.planetarium.toya.net.pl),
• Planetarium i Obserwatorium Astronomiczne w Olsztynie (www.planetarium.olsztyn.pl),
• Planetarium im. Dziewulskiego w Toruniu (www.planetarium.torun.pl).

Ponadto są jeszcze stacjonarne planetaria cyfrowe:
• Instytut Astronomiczny Uniwersytetu Wrocławskiego we Wrocławiu (www.planetarium.astro.uni. wroc.pl),
• Instytut Fizyki Akademii im. Długosza w Częstochowie (www.kino-sferyczne.pl),
• Planetarium „Niebo Kopernika” w CN „Kopernik” w Warszawie (www.niebokopernika.pl),
• Planetarium w Extreme Park w Ustroniu (www.rownica.pl/atrakcje),
• Planetarium w Międzyzdrojach (www.planetarium-miedzyzdroje.pl),
oraz cyfrowe planetaria mobilne oferujące seanse objazdowe w szkołach:
• Anikino – Kraków (www.anikino.pl/index.php?s=oferta&id=19),
• Aries – Urzędów k. Kraśnika (www.joziowazagroda.pl/planetarium.html),
• Astroarena – Kalisz (www.astroarena.pl),
• Astrolab – Poznań (www.planetariummobilne.edu.pl),
• Astropark – Warszawa, Urszulin (www.astropark.pl),
• Bajkonur – Świdnica (www.przenosneplanetarium.pl/nasze-planetarium.html),
• Cassiopeia – Olsztyn (www.mobilneplanetarium.pl),
• Planeta Anuka – Warszawa (www.anuka.pl),
• Ursa Major – Łódź (www.niebowklasie.pl).

Aktualną mapę planetariów w Polsce wraz z ich charakterystyką można znaleźć na stronie www.stalker. republika.pl/polskie_planetaria.html.

Architektura i sztuka

Wizyta w dowolnym planetarium to nie tylko okazja do omówienia zastosowań matematyki w astronomii i optyce, ale pretekst do badania zasad budowy kopuł geodezyjnych i ich wykorzystania w architekturze. Są to wielościany, które w bardzo dobry sposób przybliżają powierzchnię kuli. Stosowane są jako atrakcyjne wizualnie, wytrzymałe i samonośne (tzn. niewymagające wewnętrznych podpór) pokrycia dachowe. Pierwszą kopułę geodezyjną wybudowano w 1923 roku według projektu niemieckiego inżyniera Walthera Bauersfelda z przeznaczeniem na planetarium w Jenie, ale współcześnie stosuje się je także jako pokrycia dachowe wewnętrznych dziedzińców (British Museum w Londynie), pasaży handlowych (Złote Tarasy w Warszawie), kin 3D (Park Nauki i Przemysłu La Vilette w Paryżu), oranżerii (Ogród Botaniczny Troja w Pradze), hal sportowych, namiotów cyrkowych, przenośnych aren itp.

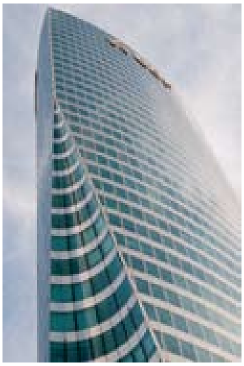

Fot. 1. Kino Muzeum Nauki i Przemysłu La Vilette w Paryżu


Fot. 2. Wieżowiec Swiss Tower w Londynie


Fot. 3. Zadaszenie holu British Muzeum w Londynie

Wycieczka śladami ciekawych form geometrycznych w architekturze może też koncentrować się na innego typu obiektach: ostrosłupach i graniastosłupach, walcach i stożkach, powierzchniach prostokreślnych (kształt paraboloidy hiperbolicznej ma np. dach dworca Warszawa-Ochota na trasie Szybkiej Kolei Miejskiej w Warszawie), krzywych stożkowych i kwadrykach (twórczość Gaudiego), a nawet na modelach wielościanów 4D (kształt hipersześcianu ma np. La Grande Arche na La Defense w Paryżu). Można też wędrować tropem wykorzystania w architekturze różnych rodzajów symetrii lub celowego łamania symetrii, złotego podziału, złudzeń optycznych itp. Uczniowie zainteresowani tą tematyką z pewnością znajdą w bliższej i dalszej okolicy wiele przykładów takich matematycznych konotacji.




Fot. 4, 5, 6. Hipersześcian, paraboloida hiperboliczna i powierzchnia stożka w dzielnicy La Defence w Paryżu

Kluczem planowania wycieczek z pogranicza matematyki i architektury może być także szczególny typ budowli, np.: mosty (badanie krzywych łańcuchowych), ogrody barokowe (badanie różnych typów symetrii), gotyckie katedry (badanie konstrukcji geometrycznych rozet i maswersków – wiele ciekawych informacji na ten temat zawiera książka Wojciecha Guzickiego „Geometria maswerków gotyckich", Omega 2011).



Fot. 7, 8, 9. Rozety katedr gotyckich w Chartres, Reims, Strasburgu

Można także tropić pojedyncze ornamenty, zwłaszcza te tradycyjne dla architektury i sztuki danego regionu. Przykładem mogą być wycieczki po Śląsku i Łużycach szlakiem gwiazd morawskich. Matematycznie jest to wielościan gwiaździsty zbudowany z 18 ostrosłupów czworokątnych i 8 trójkątnych doklejonych do ścian bazowej bryły, którą jest archimedesowy sześcio-ośmiościan rombowy mały. W tradycyjnej wersji gwiazda morawska ma zatem 26 ramion, istnieją jednak jej odmiany zbudowane na innych wielościanach archimedesowych, które mają 20, 32, 50, 64, a nawet... 110 ramion.

Pierwsza taka gwiazda została zbudowana około 1830 roku w niemieckim miasteczku Niesky, niedaleko obecnej granicy z Polską, we wschodniej Saksonii, w dolnośląskim powiecie górnołużyckim. Miasto to zostało założone w 1742 roku przez braci morawskich uciekających z Czech przed prześladowaniami husytów. Gwiazdę zbudował podczas lekcji geometrii nauczyciel matematyki szkoły prowadzonej w Niesky przez braci morawskich. Była to szkoła z internatem, do której uczęszczało wiele dzieci z rodzin misyjnych. Gwiazda miała być symbolem ich tęsknoty i rozłąki z rodziną. W 1880 roku jeden z absolwentów szkoły założył w Herrnhut wytwórnię gwiazd na sprzedaż i wykonywane są tam do dziś (www.moravian-stars.com). Wkrótce gwiazda morawska stała się bardzo popularnym adwentowym i bożonarodzeniowym elementem zdobniczym nie tylko wśród braci morawskich, ale w wielu wspólnotach ewangelickich, gdzie symbolizuje gwiazdę betlejemską. Tradycyjnie rodziny zbierały się, by razem wykonać gwiazdę i wywiesić ją w pierwszą niedzielę Adwentu, a zdjąć w uroczystość Trzech Króli.

Fot. 10. Pomnik św. Jana Nepomucena na Ostrowie Tumskim we Wrocławiu

Fot. 11. Kościół ewangelicko-augsburski pod wezwaniem Opatrzności Bożej we Wrocławiu

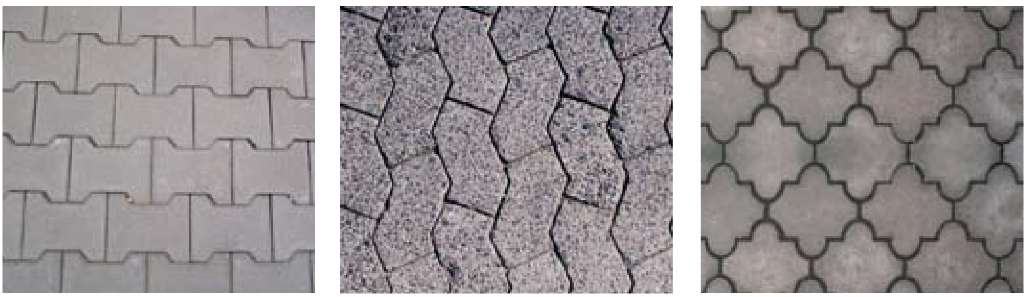
Fot. 12. Kościół ewangelicko-augsburski w Kłodzku

Oczywiście wiele konotacji matematycznych można także znaleźć z innymi rodzajami sztuki. Mogą one dotyczyć twórczości konkretnego artysty (np. Pabla Picassa, Antonio Gaudiego, Mauritsa Eschera, Friedricha Hundertwassera) lub nawet konkretnego dzieła sztuki. Wtedy w ramach matematycznych wycieczek można z powodzeniem zaglądać do muzeów sztuki. Ze względu na bogactwo możliwych wątków zostawiamy ten temat samodzielnym eksploracjom nauczycieli i uczniów.

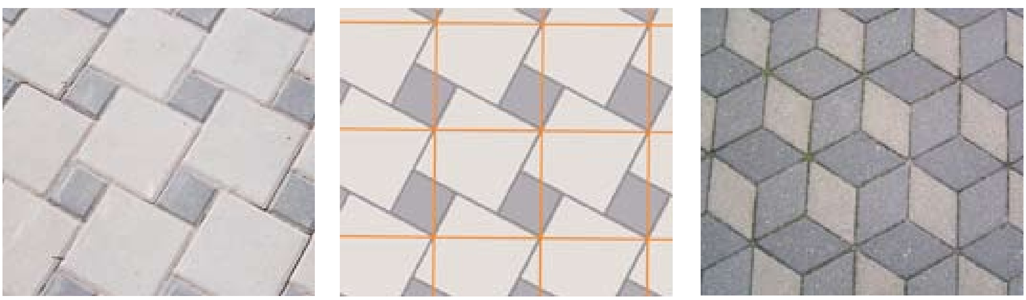
Matematyka w mieście

Wycieczką matematyczną może stać się nawet krótki spacer dookoła szkoły. Wystarczy spojrzeć pod nogi i badać kształty i układy płytek chodnikowych. Ile możliwości daje ułożenie chodnika ze zwykłych prostokątów (fot. 13–15)? Jak zaprojektować inny kształt płytki, aby parkietowała płaszczyznę (fot. 16–18)? Jakie możliwości daje łączenie płytek w różnych kształtach? Jak zobaczyć pod nogami dowód twierdzenia Pitagorasa? A jak ulec złudzeniu optycznemu?

Fot. 13, 14, 15



Fot. 16, 17, 18



Fot. 19, 20, 21

Obiektem ciekawych matematycznych badań mogą też być chociażby klapy studzienek kanalizacyjnych. Można analizować ich typy symetrii, zliczać symetrie tapetowe, obserwować parkietaże foremne i półforemne, wzory meandryczne lub różne rodzaje geometrycznych figur.



Fot. 22, 23, 24

Także miejskie rynki i inne place mogą zainteresować matematyka. Można wśród nich poszukiwać obiektów o ekstremalnych rozmiarach lub dziwnych kształtach. Taką wyprawę warto poprzedzić kwerendą internetową i dobrze zaplanować, a po powrocie przygotować opracowania statystyczne i ciekawe zadania. Przy okazji badania tego tematu można dowiedzieć się, że:

- Warszawski plac Defilad pod względem wielkości znajduje się na trzecim miejscu na świecie (po pekińskim Tiananmen i placu Macroplaza w Monterrey w Meksyku) i pierwszym w Europie (ma około 700 m × 300 m). W Polsce na kolejnych miejscach znajdują się rynki w Krakowie i we Wrocławiu.
- W kategorii placów o ciekawych kształtach zwycięża del Prato w Padwie (czwarty w Europie pod względem wielkości), który jest regularną elipsą. Place założone na planie elipsy można też znaleźć w innych miastach, np. w Rzymie (pl. Św. Piotra) lub we Wrocławiu (rondo Regana). Ciekawym zadaniem jest wyznaczenie parametrów i ognisk tych elips. Takie rozwiązania urbanistyczne były popularne w XVII wieku i miały historyczne uzasadnienie, z uwagi na ówczesne odkrycia naukowe. Wcześniej za kształt doskonały uważano za Platonem koło (wszak od czasów Ptolemeusza wszystkie ciała niebieskie poruszały się po okręgach). Odkrycie eliptycznych orbit przez Keplera zmieniło także kanony estetyki.

Fot. 25. Prato della Valle – Padwa

Fot. 26. Pl. Św. Piotra – Rzym

Fot. 27. Rondo Regana – Wrocław

- Osobną interesującą kategorię placów stanowią trójkątne rynki. Szczególnie znane są te w Paryżu, Berlinie czy Wilnie, ale i w Polsce takich nietypowych rynków nie brakuje. Najbardziej znany jest ten w Łowiczu, który uczniowie z koła matematycznego z miejscowego Pijarskiego LO ochrzcili Matematycznym Rynkiem i co miesiąc w stojącej tu gablocie wywieszają zadania… o swoim rynku. Niemniej znany ze swego kształtu jest rynek krakowskiego Podgórza. Dwusieczna jego południowego kąta, gdzie stoi kościół św. Józefa (wzór krakowskich szopek) stanowi oś tego kościoła skierowaną na wieżę kościoła Mariackiego, linia do niej prostopadła łączy ozdobne hełmy podgórskiego ratusza i reprezentacyjnej kamienicy w narożniku ul. Kalwaryjskiej, a w przecięciu dwusiecznych kątów wybudowano studnię. W Polsce słynne trójkątne rynki znajdują się także w Brodnicy, Białymstoku i Jaworznie.



Fot. 28, 29, 30. Rynki: Łowicz, Kraków-Podgórze, Wilno

Matematyka w górach, na łące, w lesie i nad morzem

Celem matematycznych wycieczek mogą być nie tylko wytwory człowieka, ale i dzieła natury, które potwierdzają matematyczne podstawy praw fizycznych. Spektakularnym przykładem mogą tu być słupy bazaltowej lawy zastygnięte w formie graniastosłupów o charakterystycznych pięcio- i sześciokątnych podstawach (to samo zjawisko można zaobserwować na pękającym błocie z dna wyschniętej kałuży – opisał je Hugo Steinhaus w *Kalejdoskopie matematycznym*). Najsłynniejszym przykładem przestrzennego parkietażu bazaltowymi słupami jest Grobla Giganta w Irlandii, ale podobne miejsca znajdziemy znacznie bliżej: Złoty Wierch koło Czeskiej Kamienicy, Pańska Skała koło Liberca (Czechy), Janowa Dolina pod Horyniem (Ukraina) i Wilcza Góra koło Złotoryi, Kamienna Góra w Lubaniu czy Organy Wielisławskie koło Świerzawy (Dolny Śląsk).

Fot. 31. Grobla Giganta

Fot. 32. Pańska Skała

Fot. 33. Janowa Dolina

Matematyczne obserwacje i badania mogą także przeprowadzać uczniowie zainteresowani biologią (na wycieczce lub w szkolnym ogródku), poszukując symetrii osiowych i obrotowych w świecie roślin i zwierząt, wykreślając pięciokąty foremne pojawiające się w kielichach kwiatów, czy badając zjawisko filotaksji na łodygach roślin, szyszkach drzew lub w kwiatostanach koszyczkowych. Ciekawe jest też, czy muszle mięczaków rzeczywiście skręcają się zgodnie z kształtem spirali równokątnej i jaki ma to związek z podobieństwem figur? Czy spacer brzegiem morza po stycznej do grzbietu jęzora ostatniej fali rzeczywiście gwarantuje przejście „suchą stopą"? Czy obserwacja pływów morskich da w efekcie kształt sinusoidy? Jakie będą jej parametry? W tych i wielu innych miejscach i sytuacjach stworzonych bez ingerencji człowieka dostrzec możemy znane kształty geometrycznych figur i wykresów funkcji.



Fot. 34, 35, 36

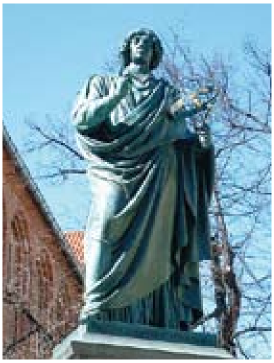


Fot. 37, 38, 39

Śladami wielkich matematyków

Dobrym pomysłem na zainteresowanie matematyką zadeklarowanych humanistów mogą być wycieczki biograficzne śladami znanych matematyków. Można odwiedzać miejsca ich narodzin, zamieszkania, pochówku, szukać pomników i tablic pamiątkowych oraz dociekać związków danej osoby z miejscem jej upamiętnienia. Choć śladów największych matematyków łatwiej czasem szukać poza granicami naszego kraju (np. Galileusza w Padwie, Kartezjusza w Paryżu, Leibniza w Lipsku, Keplera w Pradze, Gaussa w Getyndze), to i w Polsce nie brakuje takich miejsc.

Biograficzna wycieczka może być kanwą interdyscyplinarnego projektu edukacyjnego w gimnazjum. Zacząć można od wielkich uczonych Mikołaja Kopernika i Marii Skłodowskiej-Curie, którzy studiowali matematykę (a miejsca z nimi związane są w wielu miastach w Polsce), by poprzez postacie mniej znane (Witelona we Wrocławiu, Heweliusza w Gdańsku, Keplera w Żarach) oraz dokonania uczonych okresu międzywojennego (Rejewski, Banach), zakończyć na matematykach XX-wiecznych (Steinhaus, Sierpiński, Zaremba).



Fot. 40, 41, 42. Mikołaj Kopernik w Toruniu, Maria Skłodowska w Lublinie, Jan Heweliusz w Gdańsku



Fot. 43, 44, 45. Stefan Banach w Krakowie, Marian Rejewski w Bydgoszczy, Johannes Kepler w Żaganiu

Zamiast zakończenia

Spróbujmy podsumować, jak przygotować matematyczną wycieczkę, by zakończyła się sukcesem, a uczniowie wrócili nie tylko z niezapomnianymi wrażeniami, ale też wiele się nauczyli. Wiele z tych zadań spoczywa na barkach nauczyciela, ale warto jak najszerzej w przygotowania zaangażować uczniów, rodziców, absolwentów.

Etap 1. Przygotowania

- Wybór miejsca i tematu, czyli tego, czemu chcemy podporządkować charakter naszej wycieczki.
- Przejrzenie zasobów internetowych, kwerenda muzealna i biblioteczna, wybór miejsc kluczowych, nasycenie programu drobiazgami znajdującymi się „po drodze" takimi jak zegary, budynki, detale architektoniczne, pomniki.
- Kontakt z lokalnymi nauczycielami matematyki, którzy mogą polecić ciekawe miejsca i osoby. Zaplanowanie wizyty w miejscowej szkole, uczelni itp.

- Ustalenie programu, w tym punktów obowiązkowych, opcjonalnych i z takich, z których trzeba zrezygnować, by nie przekroczyć założonego czasu wycieczki. Kontakt z przewodnikami i obsługą muzeów, poinformowanie o nietypowym celu i uczestnikach wycieczki, prośba o uwzględnienie tej specyfiki podczas zwiedzania.
- Ustalenie kosztorysu, zorientowanie się w możliwości uzyskania zniżek, wystosowanie wniosków do firm i instytucji, poszukanie sponsorów i partnerów. Potwierdzenie rezerwacji (noclegi, wstępy, przewozy).
- Przygotowanie uczestników, omówienie celu wycieczki, rozdzielenie zadań, wirtualna prezentacja zwiedzanych miejsc. Opracowanie referatów do wygłoszenia na trasie wycieczki (nawet jeśli są mniej wprawne niż profesjonalnych przewodników, często są znacznie bardziej atrakcyjne dla kolegów).

Etap 2. Realizacja

- Jeśli wycieczka była dobrze przemyślana, nie pozostaje nic innego, jak tylko pilnowanie realizacji planu. Gdyby jednak wystąpiły niespodziewane okoliczności (niedoszacowanie czasu, pojawienie się znienacka nowych punktów programu) należy elastycznie podejmować decyzje, mając stale na uwadze nadrzędny cel wycieczki.
- Współodczuwanie odpowiedzialności przez uczestników za realizację planu. Skutkuje to zwiększoną dyscypliną i zaangażowaniem.
- Podziękowania dla uczestników, obsługi (kierowca, pilot) i osób, które włączyły się w organizację wycieczki (pisemne podziękowania od młodzieży dla miejscowych współorganizatorów, drobne upominki, gadżety z logo szkoły itp.).

Etap 3. Podsumowanie

- Wycieczka nie odniesie swojego celu, jeśli nie zostanie odpowiednio podsumowana po powrocie. Po zakończeniu prowadzonych badań i uzupełnieniu wyników np. poszukiwaniami brakujących danych w internecie, można przygotować pokaz zdjęć, wystawę, przedstawić wyniki prac na lekcji lub spotkaniu z rodzicami i dyrekcją szkoły, urządzić wieczór wspomnień uzupełniony o prezentacje miejsc, których nie udało się odwiedzić i wyjaśnić zagadki i wątpliwości, które pojawiły się podczas wyjazdu a pozostały nierozstrzygnięte.
- Materiały można opublikować na szkolnej stronie internetowej.

Literatura

- J. Graham-Cumming, The Geek Atlas, O'Reilly, 2009.
- Rubryka *Matematyczne Wycieczki* w „Magazynie Miłośników Matematyki".
- Publikacje na Wrocławskim Portalu Matematycznym (zakładki: Polecamy > Matematyka wokół nas).

Wszystkie wykorzystane w tym rozdziale zdjęcia pochodzą z Wrocławskiego Portalu Matematycznego (www.matematyka.wroc.pl) i zostały wykonane przez uczestników projektu „Poznajemy matematyczną Europę". Publikujemy je za zgodą redakcji Portalu.

CZĘŚĆ IV

Jak uczyć, aby wychować laureata olimpiady (czyli matematyka dla wybranych)

1. Korespondencyjny klub olimpijczyka – Krzysztof Omiljanowski
2. Kółko olimpijskie – Jacek Dymel
3. Seminaria uczniowskie – Michał Śliwiński
4. Warsztaty olimpijskie – Jacek Dymel
5. Uczniowskie prace badawcze z matematyki – Jacek Dymel
6. Biblioteczka olimpijczyka – Jacek Dymel

1. Korespondencyjny klub olimpijczyka

Krzysztof Omiljanowski, Wrocław

Korespondencyjny Klub Olimpijczyka działał w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego w latach 2000–2002. Jego celem było stworzenie możliwości rozwijania matematycznych talentów uczniom szkół średnich z małych ośrodków, położonych daleko od centrów akademickich lub pochodzących z ubogich rodzin, których nie stać było na dojeżdżanie na zajęcia do większych miast. W artykule prezentujemy idee klubu oraz przykładowe karty samodzielnej pracy wysyłane do uczniów.

KOKO

W dobie powszechnego dostępu do internetu nawet w małych miejscowościach oraz rozwoju technik kształcenia na odległość (tzw. e-learningu) problem dostępu do wiedzy i kontaktu uczniów z nauczycielami akademickimi, którzy otoczą ich profesjonalną opieką dydaktyczną, jest łatwy do rozwiązania. W tym rozdziale opisujemy nasze doświadczenia z okresu, gdy korzystanie z multimediów na taką skalę nie było jeszcze możliwe. Nie umniejsza to jednak wartości opracowywanych wtedy dla uczniów materiałów dydaktycznych.

Działalność Klubu Olimpijczyka była finansowana z dotacji Fundacji Batorego. Oprócz części korespondencyjnej bazowała na sobotnich zjazdach uczniów i ich nauczycieli dwa razy w semestrze (ze zwrotem kosztów podróży) odbywających się w Instytucie Matematycznym UWr, a na zakończenie cyklu spotkań uczniowie brali udział w kilkudniowym obozie naukowym.

Każdy zjazd zaczynał się dwoma wykładami popularnonaukowymi prowadzonymi przez pracowników uniwersytetu. Po wykładach (po przerwie obiadowej w stołówce studenckiej) prowadzone były warsztaty zadaniowe dla uczniów, a równolegle z nimi – seminarium dla nauczycieli. Warsztaty zadaniowe były związane z tematyką wykładu i prowadzone przez doktorantów. Oto przykładowe tematy zajęć:

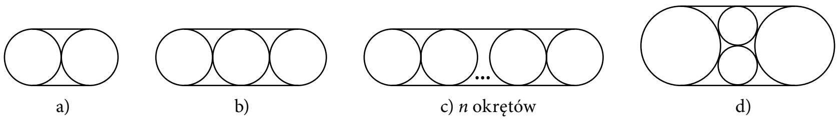
- Grzegorz Karch (Uniwersytet Wrocławski) – Metody różnicowe i różniczkowe w biologii
- Krzysztof Omiljanowski (Uniwersytet Wrocławski) – Funkcje schodkowe i kawałkami liniowe
- Krzysztof Omiljanowski (Uniwersytet Wrocławski) – Trygonometria płaska i sferyczna
- Zdzisław Pogoda (Uniwersytet Jagielloński) – W królestwie wielościanów

Na zakończenie zjazdu uczniowie otrzymywali zestawy zadań, które rozwiązywali po powrocie do domu i odsyłali na uniwersytet (jeden zestaw na miesiąc). W ustalonych terminach mogli konsultować się z prowadzącym klub e-mailowo (co nie było jeszcze wtedy powszechne) lub telefonicznie. Nadsyłane rozwiązania zadań sprawdzali studenci specjalności nauczycielskiej.

Dorobkiem materialnym, jaki pozostał po zajęciach Klubu, są starannie opracowane materiały dydaktyczne. Część z nich prezentujemy poniżej i zachęcamy do wykorzystania w swojej pracy.

Na bieżni

Zad. 1. Bieżnia to dwa odcinki proste (o długości *d)* oraz dwa półokręgi (o promieniu *r).* Jej (wewnętrzny) obwód ma dokładnie 400 merów. Znajdź d i r dla stadionów z rysunków.



Rys. 1

Zad. 2. Sama bieżnia składa się z 8 torów o szerokości t (zazwyczaj t = 1,25 m). Wyznacz pole (samej) bieżni na powyższych stadionach.

Dalej zakładamy, że odcinek prosty bieżni ma 100 m *(d* = 100) i że metę wyznaczono na końcu „prostej".

Zad. 3. Przy starcie do biegu na 400 m zawodnik z pierwszego toru jest na linii mety. Zawodnik z drugiego toru „wyprzedza" go trochę (o w_2 metrów), zawodnik z trzeciego toru „wyprzedza" z kolei tego z toru nr 2 (o w_3), ten z toru czwartego jest o w_4 metry przed tym z toru nr 3 itd. Oblicz wielkości w_2, w_3, …, w_8. *A jakie są te wielkości przy $d = 90$?

Zad. 4. Podobnie wyznacz miejsca startu do biegu na 200 m. Czy leżą one symetrycznie (względem środka stadionu) do tych poprzednich? *A jak to jest na stadionie o $d = 90$?

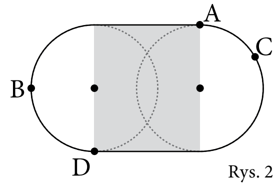
Zad. 5. *Wyznacz odstępy v_2, v_3, …, v_8 do startu na 800 m, zakładając, że zawodnicy biegną po torach tylko pierwszy wiraż (i dalej po najkrótszej trasie). Przyjmij $d = 100$. **Oszacuj wielkość $2v_k - w_k$.

Zad. 6. Oglądając w TV start do biegu na 400 m, wydaje się, że zawodnicy z torów 7 i 8 są dużo bliżej niż ci z torów 1 i 2. A przecież $w_8 = w_2$. Jak wytłumaczyć to złudzenie?
Podpowiedź. Porównaj pewne kąty, np. „ustaw kamerę" w środku okręgów wyznaczających pierwszy wiraż.

Zad. 7. Zawodnik ostatnio stale osiągał czas 43,50 s w biegu na 400 m. Jednak nie biega optymalnie – biegnie dokładnie środkiem toru (dystans 400 m jest mierzony wzdłuż wewnętrznej linii toru). Czy gdyby biegł idealnie wzdłuż wewnętrznej linii toru, to pobiłby rekord świata Michaela Johnsona równy 43,18 s? Czy jest to zależne od toru, po którym by biegł?

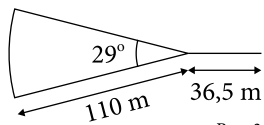
Zad. 8. W sztafecie 4 × 400 m pałeczkę należy przekazywać w strefach zmian tj. pomiędzy 390–410, 790–810 i 1190–1210 metrów od startu. Nasi zawodnicy osiągają następujące czasy (na 400 m):
A. A. – 43,5 s   B. B. – 43,6 s   C. C. – 43,8 s   D. D. – 43,9 s
Ustal strategię biegu, tzn. kolejność zawodników oraz miejsca zmian (zakładając, że zmiany mogą być dokonane momentalnie i że zawodnicy od razu biegną ze swą maksymalną, stałą szybkością). Jaki wtedy osiągnęliby łączny czas?
Podpowiedź. Pomyśl najpierw o sztafecie 2 × 400 m i 3 × 400 m.

Zad. 9. Wyznacz na bieżni punkt A_1 najdalej położony od punktu A (w linii prostej). Podpowiedź. Najbardziej odległym od punktu A nie jest ani punkt B, ani D. Podobnie wyznacz punkty B_1 i C_1. *Dlaczego są to najdalsze punkty? Oblicz odległość AA_1 oraz BB_1.
**Oznaczmy przez A_{k+1} punkt na bieżni najdalej położony od punktu A_k. Co się dzieje z ciągiem $\{A_n\}$? A co, gdy początkowy punkt A jest w innym miejscu?



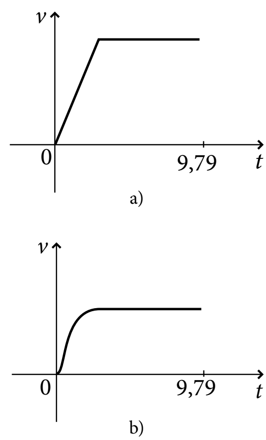
Rys. 2

Zad. 10. **Zapewne dla wszystkich stadionów $d < 100$. To zastanawiające dlaczego tak się je buduje. Może dlatego, by zmieścić na murawie pole do rzutów oszczepem, które jest w kształcie wycinka koła o kącie 29° i ma rozbieg długości 36,5 m (patrz rysunek). Ponieważ rekordowe rzuty osiągają już niemal 100 m, trzeba przyjąć pewien zapas – powiedzmy 110 m. Sprawdź, czy na stadionie o $d = 100$ zmieści się pole do rzutów oszczepem (wraz z rozbiegiem) położone symetrycznie względem osi symetrii stadionu.



Rys. 3

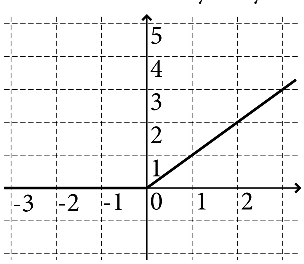
Zad. 11. *Rekord świata na 100 m wynosi obecnie 9,79 s. Sądzi się zatem powszechnie, że maksymalna szybkość, jaką osiągnął człowiek, to nieco mniej niż 37 km/h. Jednak zapomina się o tym, że zawodnicy nie biegną ruchem jednostajnym. Muszą się najpierw rozpędzić. Załóżmy, że przez pierwsze 30 m zawodnicy rozpędzają się, a potem biegną ze stałą prędkością. Oblicz tę maksymalną prędkość przy dodatkowym założeniu, że zmiana prędkości rekordzisty jest taka, jak na pierwszym rysunku.
Uwzględnij dodatkowo, że tzw. czas reakcji wynosi 0,15 s, to znaczy, że zawodnik rusza z bloków startowych dopiero po tym czasie.
***Oblicz maksymalną prędkość, zakładając, że początkowo (przez 30 m) prędkość wzrasta jak funkcja kwadratowa, przechodząc gładko w prędkość stałą.



Rys. 4

Wycieczka na Giewont

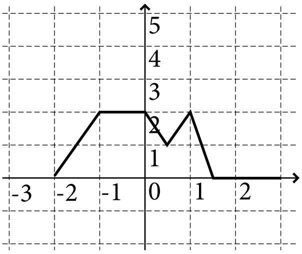
W zadaniach 1–6 wykorzystamy funkcję g.



Rys. 5

$$g(x) = \frac{1}{2}(|x|+x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x\in(-\infty, 0) \\ x \text{ dla } x\in(0, +\infty) \end{cases}$$

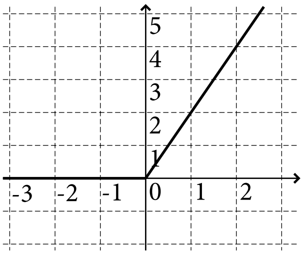
Zad. 0. (żmudne) Podaj przepis funkcji o podanym wykresie (wykorzystaj kratki).



$$G_{iewont}(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{dla } x\in(-\infty, -2) \\ \ldots \text{ dla } x\in(\ldots, \ldots) \\ \ldots \\ \\ \\ \end{cases}$$

Rys. 6

Zad. 1. Uzupełnij w miejscach oznaczonych kropkami. Podpisz również punkty wykresu funkcji f_4.

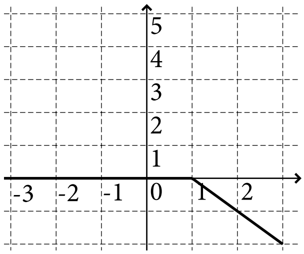


a)

$f_1(x) = 2g(x) =$

$= |x|+\ldots =$

$= \begin{cases} \ldots \text{ gdy } x\in\ldots \\ \ldots \text{ gdy } x \geq 0 \end{cases}$

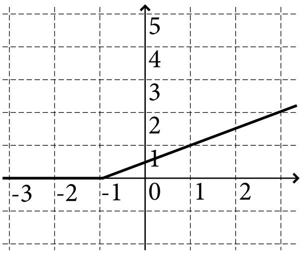


b)

$f_2(x) = -g(\ldots\ldots) =$

$= \ldots =$

$= \begin{cases} \ldots \text{ jeśli } x \leq \ldots \\ \ldots \text{ jeśli } x \geq \ldots \end{cases}$

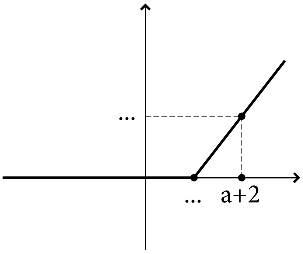


c)

$f_3(x) = \ldots =$

$= \ldots =$

$= \begin{cases} \ldots \text{ dla } x \ldots \\ \ldots \text{ dla } x \ldots \end{cases}$



d)

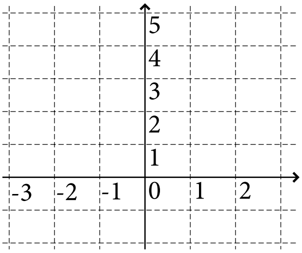
Rys. 7

$f_4(x) = b{\cdot}g(x-a) =$

$= \ldots =$

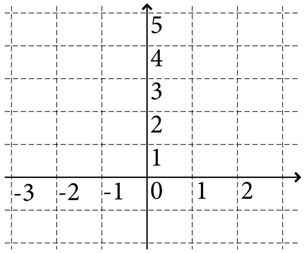
$= \begin{cases} \ldots \\ \ldots \end{cases}$

Zad. 2. Naszkicuj wykresy funkcji (ewentualnie zapisz najpierw ich wzory z „klamrami”).



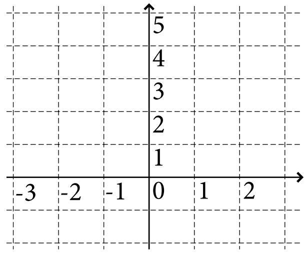
a)

$f_5(x) = 2g(x–1)+3g(x–2)$



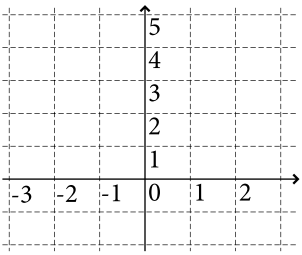
b)

$f_6(x) = 2g(x–1)–3g(x–2)$



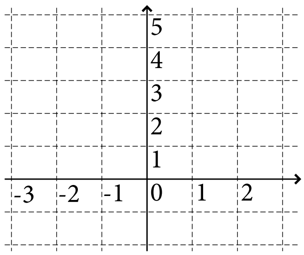
c)

$f_7(x) = 3g(x–1)+2g(x–2)$



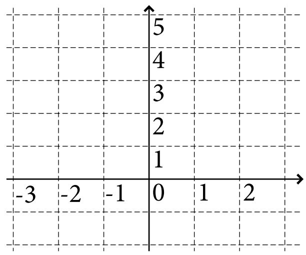
d)

$f_8(x) = 4g(x–1)–4g(x–2)$



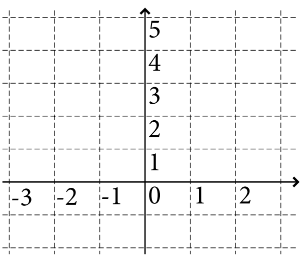
e)

$f_9(x) = 2g(x+1)–g(x–2)$



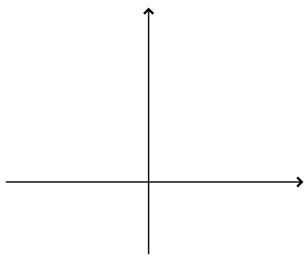
f)

$f_{10}(x) = 3g(x+1)+2g(x–2)$



g)

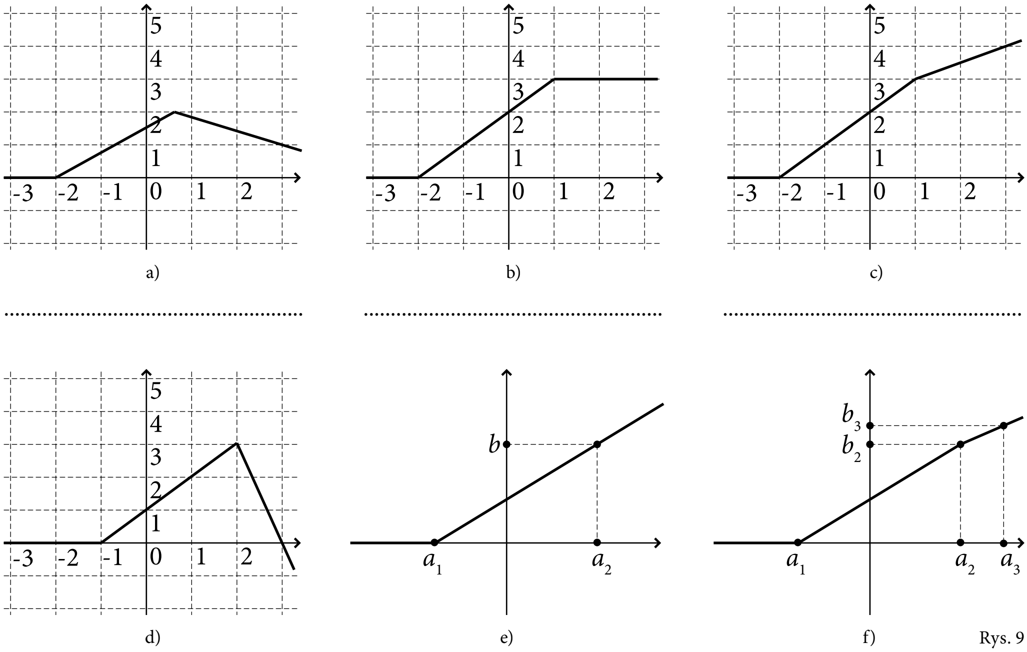
$f_{11}(x) = 2g(x–1)+3g(x+1)$


h)

$f_{12}(x) = g(x–a_1)–b\cdot g(x–a_2)$

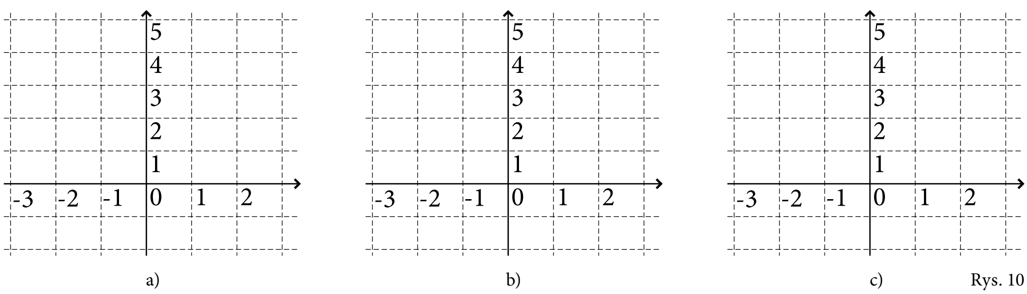
Rys. 8

Zad. 3. Podpisz wykresy (za pomocą funkcji *g*).



Rys. 9

Zad. 4. Naszkicuj wykresy funkcji.



Rys. 10

$f_{13}(x) = g(x) - g(x-1) + g(x-2)$

$f_{14}(x) = 2g(x+1) - 3g(x) + 2g(x-2)$

$f_{15}(x) = 3g(x+2) - 7g(x+1) + 4g(x) + 5g(x-1) - 6g(x-1{,}5)$

Zad. 5. Napisz (używając funkcji g) wzór funkcji o wykresie jak na rysunku w zadaniu 0.

$G_{iewont}(x) = \ldots$

Zad. 6. (nieciekawe) Funkcja g ma następujące dwie własności:

dla dowolnej funkcji f i stałych a i b dla każdego $x \leq \ldots$ zachodzi równość $f(x) = f(x)+b\cdot g(x-a)$	oraz	dla dowolnej funkcji f i stałych a i b dla każdego $x \leq a$ zachodzi równość $f(x)\cdot b\cdot g(x-a) = \ldots$

Czy potrafisz je uzasadnić?

Teraz trochę trudniejsze zadania. Spróbuj rozwiązać choć kilka z nich. Eksperymentuj, wstawiając różne liczby w miejsce parametrów.

Zad. 7. *(nie o funkcji g) Opisz słowami, jak wyglądają wykresy poniższych funkcji. Podaj zbiory wartości itp.

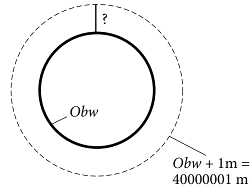
a) $a(x) = |x-1|+|x-3|$
b) $b(x) = |x-a_1|+|x-a_2|$ (zakładamy że $a_1 < a_2$)
c) $c(x) = |x-1|-|x-3|$
d) $d(x) = |x-1|+|x-3|+|x-4|$
e) $e(x) = |x-1|+|x-3|+|x-4|+|x-7|$
f) $f_n(x) = |x-a_1|+|x-a_2|+\ldots+|x-a_n|$ (zakładamy że $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$)
g) $g_n(x) = |x-a_1|+|x+a_1|+|x-a_2|+|x+a_2|+\ldots+|x-a_n|+|x+a_n|$ (zakładamy że $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$)
h) $h_n(x) = \Big|\ldots\Big|\Big|\big||x|-1\big|-2\Big|-3\Big|\ldots-n\Big|$
i) $i_n(x) = \Big|\ldots\Big|\Big|\big||x|+1\big|+2\Big|+3\Big|\ldots+n\Big|$

Który z przykładów jest najłatwiejszy?

Zad. 8. *Niech $h(x) = \frac{1}{2}(|x|-|x-1|+1)$. Eksperymentuj!

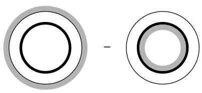
a) Opisz słowami, jak wygląda wykres funkcji $f(x) = c\cdot h(b(x-a))$, gdzie a, b, c to parametry.
b) Opisz słowami, jak wygląda wykres funkcji $f(x) = c_1\cdot h(b_1(x-a_1))+c_2\cdot h(b_2(x-a_2))$, gdzie a, b, c to parametry.
c) Ułóż i rozwiąż zadania z funkcją h analogiczne do zadań 3 i 4.
d) Napisz (używając funkcji h) wzór funkcji o wykresie jak na rysunku w zadaniu 0.

Ćwiczenia ze wstążką



Zacznijmy od bardzo starej zagadki.
Zad. 1. Opasujemy równik (*Obw* = 40 000 km = 40 000 000 m) wstążką o 1 m dłuższą od jego długości. Między wstążką a równikiem tworzy się luka. Czy przez tę lukę:
a) można przeciągnąć włos (0,02 mm)?
b) może przejść mrówka (2 mm)?
c) może przejść mysz (2 cm)?

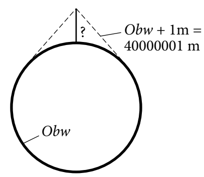
Rozwiązanie jest zaskakujące: odpowiedź nie zależy od długości równika. Dla Marsa czy globusa jest taka sama.



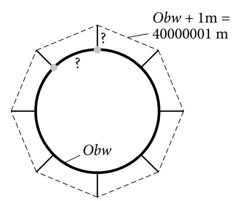
$= 1\text{ m}$

$$\begin{aligned} 2\pi(R+x)-2\pi R &= 1\text{ m} \\ 2\pi x &= 1\text{ m} \\ x &= \frac{1}{2\pi}\text{m} \approx 15{,}9\text{ cm} \end{aligned}$$

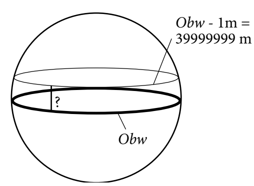
Kolejne zagadki to impresje na powyższy temat. W każdym przypadku warto najpierw spróbować odgadnąć rząd poszukiwanej wielkości (milimetry, centymetry, decymetry, metry, dziesiątki metrów), a dopiero potem rozwiązywać. Zbadamy w ten sposób własne intuicje.



Zad. 2. Wstążkę o 1 m dłuższą od równika (*Obw* = 40 000 km = 40 000 000 m) naciągamy, wstawiając kijek. Jaki wysoki?

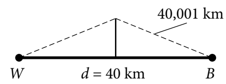


Zad. 3. Ustawiamy wzdłuż równika (*Obw* = 40 000 km = 40 000 000 m) *n* kijków o jednakowej długości *x* w jednakowych odstępach *y* tak, że rozpięta na nich wstążka o 1 m dłuższa od równika nie dotyka ziemi. Znajdź najmniejsze *n*, dla którego można to zrobić. Dla tego *n* znajdź *x* i *y*. Zakładamy, że pomiędzy kijkami wstążka nie zwisa, czyli, że tworzy odcinek.



Zad. 4. Wstążkę o 1 m krótszą od równika (*Obw* = 40 000 km = 40 000 000 m) kładziemy na równoleżniku. Jak blisko równika leży wstążka?

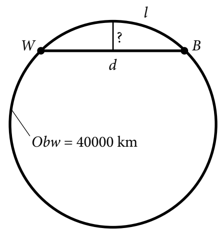
Zad. 5. Pomyślmy, że Ziemia jest płaska. Pomiędzy Wrocławiem a Brzegiem (d = 40 km) rozciągamy wstążkę o 1 m dłuższą od odległości tych miast. Nadmiar gubimy, tworząc „namiot". Jaki wysoki?



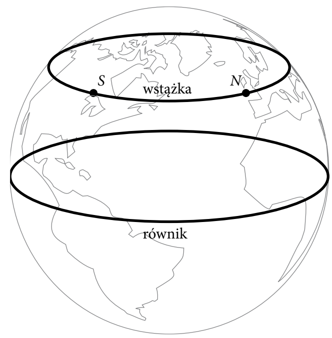
Zad. 6. Teraz Ziemia jest kulą (Obw = 40 000 km). Pomiędzy Wrocławiem a Brzegiem kopiemy tunel na skróty. O ile skróci on drogę między tymi miastami? Jak głęboko pod ziemią przebiega?

a) Przyjmujemy, że odległość między Wrocławiem a Brzegiem wynosi d = 40 km mierzona wzdłuż tunelu.

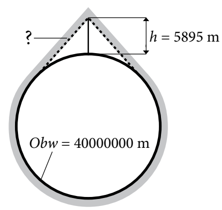
b) Przyjmujemy, że odległość między Wrocławiem a Brzegiem wynosi l = 40 km mierzona po łuku Ziemi.



Zad. 7. Pomiędzy Nantes (47°N, 1°W) w Bretanii a Saint John's na Nowej Funlandii (47°N, 52°W) naciągamy wstążkę. Okazuje się, że nie leży ona na 47 równoleżniku. Dlaczego? (Powód jest ten sam, dla którego samoloty z Kopenhagi do San Francisco latają nad Grenlandią. Popatrz na globus.)
O ile procent wstążka jest krótsza od części równoleżnika pomiędzy Nantes i Saint John's? Czy wynik ulegnie zmianie, gdy rozpatrzymy Nantes i Seattle (47°N, 122°W)?



Zad. 2^{-1}. Długość równika (Obw = 40 000 km = 40 000 000 m) jest obliczona bez uwzględnienia wzniesień terenu. Wstążka naciągnięta wokół równika będzie zahaczać o wierzchołek Kilimandżaro (5895 m n.p.m), zatem jest dłuższa od równika. O ile? Inne wzniesienia pomijamy.



MdM

Kontynuacją (lub raczej następstwem) działalności Korespondencyjnego Klubu Olimpijczyka (KOKO) były spotkania kursu Matematyka dla Myślących (MdM) prowadzone w Instytucie Matematycznym UWr przez Jarosława Wróblewskiego w latach 2008–2010. Tym razem zajęcia miały formę warsztatów zadaniowych, inny też był charakter proponowanych uczniom zadań. Ale nadal podstawowym celem było przełamanie rutyny zadań szkolnych i egzaminacyjnych oraz wyrobienie nawyku logicznego rozumowania i argumentowania, co miało procentować w przyszłej edukacji po podjęciu studiów wyższych na kierunkach ścisłych. Materiały z tego kursu (zadania wraz z rozwiązaniami) są ogólnie dostępne na stronie projektu: www.math.uni.wroc.pl/mdm.

2. Kółko olimpijskie

Jacek Dymel, Kraków

Niezwykle istotnym elementem w pracy z uczniem wybitnie uzdolnionym jest systematyczność działań. W czasie lekcji trudno skupić uwagę wyłącznie na takich uczniach. Nie pozwala na to liczba osób w klasie, cel lekcji, konieczność realizowania programu nauczania i obowiązek przygotowania uczniów do egzaminów. Dlatego najlepszą formą zajęć z uczniami uzdolnionymi są kółka olimpijskie. Jak je przygotować i jak prowadzić? Jakie stosować formy zajęć i metody nauczania? Jakie tematy są szczególnie wskazane do realizacji na takich kółkach?

Pomysł na kółko olimpijskie

Kółko olimpijskie może przybierać różne formy, na przykład:

- omówienia konkretnego zagadnienia matematycznego w postaci wykładu i wspólne rozwiązywanie zadań związanych z tym zagadnieniem,
- wspólne rozwiązywanie zadań, które łączy pewna idea (np. zadania, w których istotną rolę odgrywa rozważenie uogólnienia przypadku szczególnego lub uszczegółowienia zagadnienia ogólnego),
- wspólne rozwiązywanie zadań z różnych dziedzin matematyki – ta forma jest szczególnie przydatna w okresie przygotowań do startu w konkursach i olimpiadach.

W tym artykule chcemy zaproponować wybrany temat kółka *Punkty szczególne trójkąta*, ale rozpisany na trzy scenariusze zajęć o różnym stopniu trudności. Realizacja każdego z nich wymaga od uczestników innego zasobu wiedzy i umiejętności. Kolejne scenariusze pozwalają rozwiązywać coraz bardziej skomplikowane problemy, pokazując poprzednie podejście do badanego zagadnienia w nieco innym świetle. Mamy tu do czynienia z klasyczną zasadą spiralności nauczania, kilkakrotnego powrotu do tego samego zagadnienia, ale za każdym razem poszerzając lub pogłębiając jego kontekst. Takie postępowanie pozwala nie tylko zdobyć wiedzę, ale i skutecznie ją utrwalić.

Każdy ze scenariuszy opatrzono uwagami metodycznymi. Rozwiązania zadań wybranych z olimpiad i obozów naukowych Olimpiady Matematycznej można znaleźć na stronie www.om.edu.pl.

Punkty szczególne trójkąta i ich własności – propozycja gimnazjalna

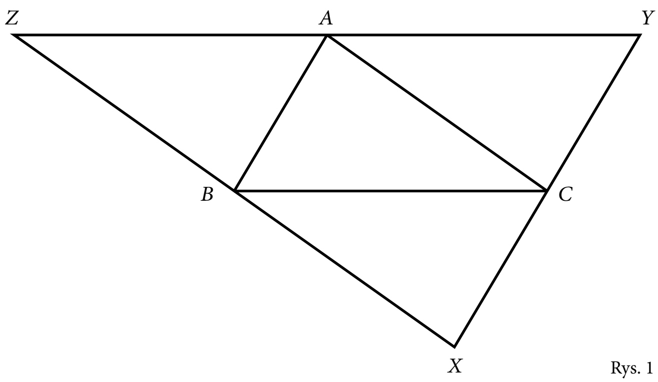
Do realizacji tych zajęć potrzebna jest znajomość twierdzenia Talesa oraz twierdzenia do niego odwrotnego. Należy je wcześniej omówić wraz z zastosowaniami. W trakcie zajęć uczniowie poznają kolejne zastosowania tych twierdzeń – ważne, by zwracać uwagę na sposób uzasadniania i zapisywania rozumowania, gdyż te umiejętności będą niezbędne do rozwiązania olimpijskich zadań.

Zacznijmy od przypomnienia i uzasadnienia kilku prostych twierdzeń.

Twierdzenie 1. Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
Dowód. Z definicji symetralna odcinka jest zbiorem punktów płaszczyzny równoodległych od końców tego odcinka. W trójkącie ABC boki AB i BC nie są równoległe, a więc symetralne tych boków też nie są równoległe, zatem muszą się przecinać. Oznaczmy ten punkt przez O. Ponieważ O należy do symetralnej boku AB, jest jednakowo odległy od punktów A i B, a ponieważ należy do symetralnej odcinka BC, jest też jednakowo odległy od punktów B i C. Z przechodniości relacji równości O jest jednakowo odległy od punktów A i C, co oznacza, że jest punktem symetralnej boku AC, ckd. Jednocześnie zauważamy, że punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC i może leżeć na zewnątrz trójkąta.

Twierdzenie 2. Dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
Dowód. Z definicji dwusieczna kąta jest zbiorem punktów płaszczyzny równoodległych od ramion tego kąta. W trójkącie ABC żadne boki nie są równoległe, a więc dwusieczne kątów ABC i BCA też nie są równoległe, zatem muszą się przecinać. Oznaczmy ten punkt przez I. Ponieważ I należy do dwusiecznej kąta ABC, jest jednakowo odległy od ramion AB i BC, a ponieważ należy do dwusiecznej kąta BCA, jest też jednakowo odległy od ramion BC i CA. Z przechodniości relacji równości I jest jednakowo odległy od prostych AB i CA, co oznacza, że jest punktem dwusiecznej kąta BAC, ckd. Jednocześnie zauważamy, że punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC i zawsze leży wewnątrz trójkąta.

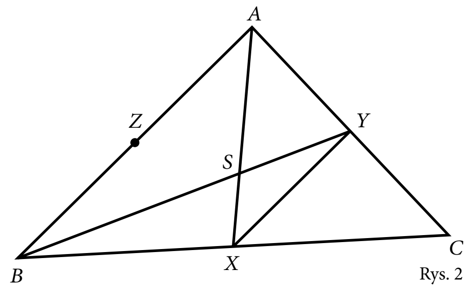
Twierdzenie 3. Wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
Dowód. Z definicji wysokość trójkąta jest prostą przechodzącą przez jego wierzchołek i prostopadłą do przeciwległego boku. W trójkącie ABC przez wierzchołki A, B, C prowadzimy proste równoległe do przeciwległych boków (rys. 1). Proste te przecinają się parami, wyznaczając trójkąt XYZ.



Rys. 1

Z konstrukcji wynika, że czworokąty $ACBZ$, $CBAY$ i $BACX$ są równoległobokami i zachodzą równości $ZA = AY = BC$, $YC = CX = AB$, $XB = BZ = AC$. Zauważamy teraz, że wysokości trójkąta ABC są symetralnymi boków trójkąta XYZ i, korzystając z twierdzenia 1, otrzymujemy tezę. Zauważamy, że punkt przecięcia wysokości może leżeć na zewnątrz trójkąta.

Twierdzenie 4. Środkowe boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
Dowód. Z definicji środkowa trójkąta to odcinek łączący wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku.

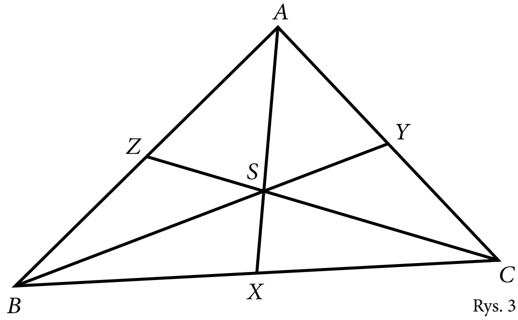


Rys. 2

Środkowe AX i BY nie są równoległe, więc muszą się przecinać. Oznaczmy ten punkt przez S. Na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa odcinek XY jest równoległy do AB, a jego długość jest połową długości AB. Na podstawie twierdzenia Talesa mamy: $\frac{AS}{SX} = \frac{BS}{SY} = \frac{AB}{XY}$, a ponieważ $XY = \frac{1}{2}AB$, otrzymujemy $AS = 2SX$ i $BS = 2SY$. Zatem punkt S dzieli odcinki AX i BY w stosunku 2:1, licząc od wierzchołka. Analogiczne można pokazać, że środkowe AX i CZ też muszą się przecinać i to w punkcie S', który dzieli odcinki AX i CZ w stosunku 2:1, licząc od wierzchołka. Zatem na odcinku AX punkty S i S' pokrywają się, ckd. Zauważamy, że punkt przecięcia środkowych leży zawsze wewnątrz trójkąta (nazywamy go środkiem ciężkości trójkąta).

Przytoczone twierdzenia wykorzystamy teraz do opisu własności środka ciężkości trójkąta.

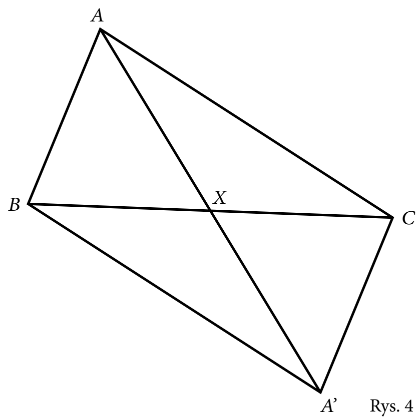
Twierdzenie 6. Środkowe trójkąta dzielą go na sześć trójkątów o równych polach.
Dowód. Niech $[ABC]$ oznacza pole trójkąta ABC, a X, Y, Z – środki boków odpowiednio BC, AC, AB. Zauważmy, że $[BXS] = [CXS]$, bo trójkąty te mają równe podstawy ($BX = XC$) i wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka S. Analogicznie wykazujemy, że $[BZS] = [AZS]$ i $[AYS] = [CYS]$. Ponieważ $[BXA] = [CXA]$ (równe podstawy CX i BX oraz wspólna wysokość opuszczona z wierzchołka A), zachodzi także równość $[BXS]+[BZS]+[AZS] = [CXS]+[CYS]+[AYS]$. Zatem $[AZS] = [AYS]$.
Analogicznie wykazujemy, że $[CYS] = [CXS]$ i $[BXS] = [BZS]$, ckd.



Rys. 3

Twierdzenie 7. Jeżeli S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, to $\frac{4}{3}(AX+BY+CZ) > AB+BC+CA > AX+BY+CZ$.
Dowód. W rozumowaniu wykorzystamy nierówność trójkąta: w trójkącie suma długości dowolnych dwóch boków jest większa od długości trzeciego boku. Zauważmy, że na podstawie nierówności trójkąta w ABS zachodzi $AB < AS+BS$. Analogicznie dowodzimy, że $CB < CS+BS$ i $AC < AS+CS$. Dodając te nierówności stronami, otrzymujemy $AB+BC+CA < 2(AS+BS+CS)$. Ponieważ zachodzą związki $AS = \frac{2}{3}AX$, $BS = \frac{2}{3}BY$, $CS = \frac{2}{3}CZ$, otrzymujemy $AB+BC+CA < \frac{4}{3}(AX+BY+CZ)$, co kończy dowód jednej części tezy.

Do dowodu drugiej wykorzystamy następujący fakt:
Lemat. Środkowa trójkąta jest krótsza od połowy sumy długości boków wychodzących z nią z jednego wierzchołka.
Przekształćmy trójkąt symetrycznie względem punktu X, który jest środkiem boku BC (rys. 4). Obraz punktu A nazwijmy A'. Z własności symetrii środkowej wynika, że czworokąt $ABA'C$ jest równoległobokiem, a z nierówności trójkąta przekątna AA' tego równoległoboku jest krótsza od sumy boków AB i BA', czyli $2AX < AB+AC$. Analogicznie pokazujemy, że $2BY < BA+BC$ oraz $2CZ < CB+CA$. Dodając te nierówności stronami otrzymujemy tezę.



Rys. 4

Na koniec zamieszczamy listę zadań do samodzielnej pracy. Pozwalają one utrwalić wiedzę i zauważyć dalsze związki między szczególnymi punktami trójkąta.

Zad. 1. Wykaż, że środek okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt utworzony przez spodki wysokości trójkąta ABC.

Zad. 2. Wykaż, że środek ciężkości, środek okręgu opisanego na trójkącie oraz ortocentrum (punkt wspólny wysokości) trójkąta nierównobocznego leżą na jednej prostej, zwanej prostą Eulera.

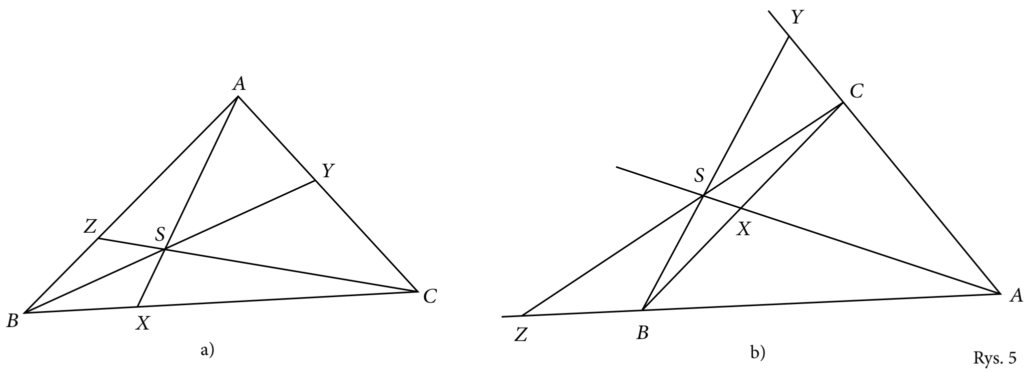
Zad. 3. (I OMG, II etap) Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $\angle BAC = 45^\circ$. Wysokości tego trójkąta przecinają się w punkcie H. Wykaż, że $AH = BC$.

Zad. 4. (V OMG, III etap) Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Punkty D, E, F są symetryczne do P odpowiednio względem prostych BC, CA i AB. Wykaż, że jeśli trójkąt DEF jest równoboczny, to proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Punkty szczególne trójkąta i ich własności – propozycja licealna

Tym razem punkty szczególne trójkąta będziemy badali za pomocą twierdzenia Cevy. To jedno z podstawowych narzędzi konkursowych i olimpijskich, pozwalające rozwiązywać zadania, w których głównym celem jest wykazanie współpękowości prostych. Na potrzeby tych zajęć uczniowie powinni sprawnie posługiwać się twierdzeniem Talesa i twierdzeniem do niego odwrotnym. Zacznijmy od kluczowego faktu.

Twierdzenie Cevy. Jeśli proste *AX, BY, CZ*, przechodzące przez wierzchołki trójkąta *ABC*, przecinają się w jednym punkcie i przecinają boki *AB, BC, CA* lub ich przedłużenia odpowiednio w punktach *Z, X, Y* (i żaden z punktów *X, Y, Z* nie pokrywa się z żadnym z wierzchołków *A, B, C*), to $\frac{AY}{YC}\cdot\frac{CX}{XB}\cdot\frac{BZ}{ZA} = 1$.
Dowód. Na rysunku 5 zostały przedstawione możliwe położenia punktu *S* przecięcia prostych *AX, BY* i *CZ*. Zauważmy, że na bokach trójkąta *ABC* leży zawsze nieparzysta liczba punktów spośród *X, Y, Z*.



Rys. 5

Zauważmy, że $\frac{BX}{XC} = \frac{[BXA]}{[CXA]}$ i $\frac{BX}{XC} = \frac{[BXS]}{[CXS]}$, zatem $\frac{BX}{XC} = \frac{[BSA]}{[CSA]}$. Analogicznie pokazujemy, że $\frac{AZ}{ZB} = \frac{[ASC]}{[BSC]}$ i $\frac{CY}{YA} = \frac{[CSB]}{[ASB]}$. Mnożąc stronami trzy ostatnie równości, otrzymujemy $\frac{AZ}{ZC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{CX}{XC} = \frac{[ASC]}{[BSC]}\cdot\frac{[CSB]}{[ASB]}\cdot\frac{[BSA]}{[CSA]} = 1$, a więc mamy tezę.

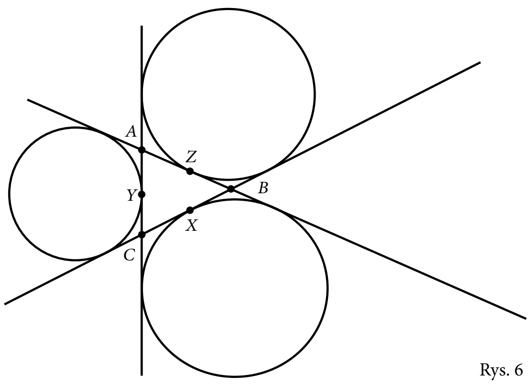
Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Cevy. Jeżeli punkty *X, Y, Z* leżą na bokach *AB, BC, CA* trójkąta *ABC* lub na ich przedłużeniach (żaden z punktów *X, Y, Z* nie pokrywa się z żadnym z wierzchołków *A, B, C* i nieparzysta liczba spośród punktów *X, Y, Z* leży na bokach trójkąta) oraz żadne dwie z prostych *AX, BY, CZ* nie są równoległe i zachodzi równość $\frac{AY}{YC}\cdot\frac{CX}{XB}\cdot\frac{BZ}{ZA} = 1$, to proste *AX, BY, CZ* przecinają się w jednym punkcie.
Dowód. Przeprowadzimy go metodą „nie wprost”. Niech zachodzi równość $\frac{AY}{YC}\cdot\frac{CX}{XB}\cdot\frac{BZ}{ZA} = 1$ i załóżmy wbrew tezie, że proste *AX, BY, CZ* nie przecinają się w jednym punkcie. Ponieważ *AX, BY* nie są równoległe, muszą się przecinać. Nazwijmy ten punkt O. Zatem prosta *CO* przecina prostą *AB* w pewnym punkcie *Z'*≠*Z*. Stosując proste twierdzenie Cevy dla prostych *AX, BY, CZ'* przecinających się w jednym punkcie, dostajemy równość $\frac{AY}{YC}\cdot\frac{CX}{XB}\cdot\frac{BZ'}{Z'A} = 1$. Zatem zachodzi równość $\frac{BZ}{ZA} = \frac{BZ'}{Z'A}$, a ponieważ punkty *Z* i *Z'* leżą jednocześnie na boku trójkąta lub na jego przedłużeniu, więc pokrywają się, a to daje sprzeczność. Zatem teza jest prawdziwa.

Udowodnione twierdzenia posłużą do wspólnego rozwiązania kilku zadań.

Zad. 1. Wewnątrz trójkąta ABC, na środkowej wychodzącej z wierzchołka C znajduje się punkt P. Oznaczmy przez X punkt przecięcia prostej AP z bokiem BC, a przez Y punkt przecięcia prostej BP z bokiem AC. Wykaż, że jeśli czworokąt $ABXY$ można wpisać w okrąg, to trójkąt ABC jest równoramienny.
Rozwiązanie. Obliczając potęgę punktu C względem okręgu opisanego na czworokącie $ABXY$, dostajemy $CX \cdot CB = CY \cdot CA$. Niech D będzie środkiem boku AB. Z twierdzenia Cevy wynika, że $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$. Z warunku $\frac{CX}{CY} = \frac{BX}{AY}$, otrzymujemy więc $\frac{CX}{CY} = \frac{CB-CX}{CA-CY}$. Wiedząc, że $\frac{CX}{CY} = \frac{CA}{CB}$, można stwierdzić, że $CB \cdot (CB-CX) = CA \cdot (CA-CY)$, czyli $CB^2-CB \cdot CX = CA^2-CA \cdot CY$, a to oznacza, że $CA = CB$, ckd.

Zad. 2. Wykaż, że proste łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgu wpisanego w ten trójkąt przecinają się w jednym punkcie (nazywamy go punktem Gergonne'a).
Rozwiązanie. Niech X, Y, Z będą punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC odpowiednio na bokach BC, AC i AB. Z własności odcinków na stycznych zachodzą równości: $AZ = AY$, $BZ = BX$ i $CX = CY$. Zauważmy ponadto, że $\frac{AY}{YC} \cdot \frac{CX}{XB} \cdot \frac{BZ}{ZA} = \frac{AZ}{YC} \cdot \frac{CY}{XB} \cdot \frac{BX}{ZA} = 1$, zatem na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy proste AX, BY, CZ przecinają się w jednym punkcie, ckd.

Zad. 3. Wykaż, że proste łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgów dopisanych do tego trójkąta przecinają się w jednym punkcie (nazywamy go punktem Nagela).
Rozwiązanie. Z definicji okrąg dopisany do trójkąta ABC jest styczny do jednego z boków i przedłużeń pozostałych boków tego trójkąta. Każdy trójkąt ma trzy okręgi dopisane. Niech X, Y, Z będą punktami styczności okręgów dopisanych do trójkąta ABC odpowiednio do boków BC, AC, AB (rys. 6). Na podstawie własności odcinków na stycznych mamy $CA+AZ = CB+BZ$, $AB+BX = AC+CX$ i $BC+CY = BA+AY$, zatem $AZ = \frac{BC+AB-AC}{2} = CX$, $BZ = \frac{AB+AC-BC}{2} = CY$ i $BX = \frac{BC+CA-AB}{2} = AY$.



Rys. 6

Zauważmy, że $\frac{AY}{YC} \cdot \frac{CX}{XB} \cdot \frac{BZ}{ZA} = \frac{BX}{YC} \cdot \frac{AZ}{XB} \cdot \frac{CY}{ZA} = 1$, więc na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy, proste AX, BY i CZ przecinają się w jednym punkcie, ckd.

Zad. 4. (Koreańska OM 1997) Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB \neq AC$. Dwusieczna kąta A przecina bok BC w punkcie V, natomiast D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka A. Okrąg opisany na trójkącie AVD przecina boki AB i CA odpowiednio w punktach F i E. Udowodnij, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie. Ponieważ proste AD i VD są prostopadłe, AV jest średnicą okręgu, czyli proste AE i VE oraz AF i VF też są prostopadłe. Ponieważ AV jest dwusieczną, $\angle EAV = \angle FAV$. Zatem trójkąty AFV i AEV są przystające (kbk). Mamy więc $AE = AF$ i $VE = VF$. Wobec tego $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA} = \frac{CE}{FB}\cdot\frac{BD}{DC} = \frac{VE\cdot\text{ctg}\angle C}{VF\cdot\text{ctg}\angle B}\cdot\frac{AD\cdot\text{ctg}\angle B}{AD\cdot\text{ctg}\angle C}$ i na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy wnioskujemy, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie, (kbk).

Zad. 5. Na bokach BC, CA i AB trójkąta ABC wybrano punkty D, E i F takie, że odcinki AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie. Proste DE i DF przecinają prostą równoległą do BC przechodzącą przez A w punktach X i Y. Wykaż, że $AX = AY$.
Rozwiązanie. Z równoległości AX i BC wynika, że trójkąty AXE i CDE są podobne (kk), zatem $AX = AE\cdot\frac{CD}{BC}$ i analogicznie $AY = AF\cdot\frac{DB}{BF}$. Wobec tego $\frac{AX}{AY} = AE\cdot\frac{CD}{EC}\cdot\frac{1}{AF}\cdot\frac{BF}{DB} = \frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{FA} = 1$ (z twierdzenia Cevy), ckd.

I jeszcze seria zadań przeznaczonych do samodzielnej pracy.

Zad. 6. Korzystając z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy, udowodnij, że:
a) środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie,
b) dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie,
c) wysokości trójkąta ostrokątnego przecinają się w jednym punkcie.

Zad. 7. (L OM, I etap) Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie P. Punkt M jest środkiem boku AB. Prosta MP przecina bok CD w punkcie Q. Udowodnij, że stosunek pól trójkątów BCP i ADP jest równy stosunkowi długości odcinków CQ i DQ.

Zad. 8. (XLIII OM, II etap) Przez środek ciężkości trójkąta ostrokątnego ABC poprowadzono proste prostopadłe do boków BC, CA i AB przecinające je odpowiednio w punktach P, Q, R. Wykaż, że jeśli $BP\cdot CQ\cdot AR = PC\cdot QA\cdot RB$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

Zad. 9. (XXXVII OM, II etap) W trójkącie ABC wybrano punkt A' na boku BC, punkt B' na boku AC oraz punkt C' na boku AB tak, że proste AA', BB' i CC' przecinają się w jednym punkcie. Udowodnij, że pole trójkąta $A'B'C'$ jest nie większe od ¼ pola trójkąta ABC.

Zad. 10. (Obóz OM Zwardoń 2007) Dany jest okrąg o środku w O. Odcinek AB jest jego cięciwą różną od średnicy. Cięciwa AC tego okręgu przechodzi przez środek odcinka OB. Proste OC i AB przecinają się w punkcie P, zaś proste OA i BC – w punkcie Q. Udowodnij, że $PC = AQ$.

Zad. 11. (Obóz OM Zwardoń 2006) Na bokach BC, CA i AB trójkąta ABC zbudowano po jego zewnętrznej stronie trójkąty BCD, CAE i ABF, przy czym $\angle CAE = \angle FAB$, $\angle FBA = \angle DBC$ i $\angle DCB = \angle ECA$. Udowodnij, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Zad. 12. (Obóz OM Zwardoń 2005) Dany jest sześciokąt wypukły, w którym przeciwległe boki są równoległe. Udowodnij, że trzy proste łączące środki przeciwległych boków tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

Punkty szczególne trójkąta i ich własności – metoda środków ciężkości

Tym razem wykorzystamy w zadaniach pojęcie środka ciężkości układu punktów materialnych. Dzięki niemu można nie tylko udowodnić, że pewne odcinki się przecinają, ale też podać stosunek, w jakim punkt ich przecięcia dzieli odcinki na tych prostych. Do realizacji tematu niezbędna jest dobra znajomość działań na wektorach.

Zacznijmy od definicji. Środkiem ciężkości punktów A i B, w których umieszczono odpowiednio dodatnie masy a i b jest taki punkt S odcinka AB, że zachodzi $\frac{AS}{SB} = \frac{a}{b}$. Warunek ten można opisać równoważnie za pomocą wektorów: $a\cdot\overrightarrow{SA} + b\cdot\overrightarrow{SB} = \vec{0}$.

Teraz można przez analogię zdefiniować środek ciężkości dla dowolnego, skończonego układu punktów. Środkiem ciężkości układu punktów $X_1,\ldots, X_n$ o masach dodatnich $m_1,\ldots, m_n$ nazywamy punkt S spełniający warunek $m_1\overrightarrow{SX_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{SX_n} = \vec{0}$.

Pokażemy kilka własności środka ciężkości układu punktów.

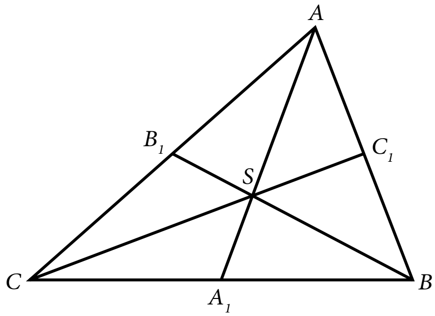
Własność 1. Jeżeli X jest dowolnym punktem płaszczyzny, to punkt S jest środkiem ciężkości układu punktów $X_1,\ldots, X_n$ z dodatnimi masami $m_1,\ldots, m_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{XS} = \frac{1}{m_1+\ldots+m_n}(m_1\overrightarrow{XX_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{XX_n})$.
Dowód. Dla dowolnych punktów płaszczyzny X i S spełniona jest równość $m_1\overrightarrow{SX_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{SX_n} =$ $= (m_1+\ldots+m_n)\overrightarrow{SX} + m_1\overrightarrow{XX_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{XX_n}$. Zatem punkt S jest środkiem ciężkości danych punktów wtedy i tylko wtedy, gdy $(m_1+\ldots+m_n)\overrightarrow{SX} + m_1\overrightarrow{XX_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{XX_n} = \vec{0}$.

Własność 2. Zbiór punktów $X_1, \ldots, X_n$ z dodatnimi masami $m_1, \ldots, m_n$ ma zawsze środek ciężkości i jest on tylko jeden.
Dowód. Wynika to natychmiast z własności 1.

Własność 3. (twierdzenie o grupowaniu punktów). Środek ciężkości punktów $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ z dodatnimi masami $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ pokrywa się ze środkiem ciężkości dwóch punktów: środka ciężkości X punktów $X_1, \ldots, X_n$ z masą $a = a_1+\ldots+a_n$ i środka ciężkości Y punktów $Y_1, \ldots, Y_m$ z masą $b = b_1+\ldots+b_m$.
Dowód. Niech Z będzie dowolnym punktem płaszczyzny. Wówczas na podstawie własności 2
$\overrightarrow{ZX} = \frac{1}{a_1+\ldots+a_n}(a_1\overrightarrow{ZX_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{ZX_n})$ i $\overrightarrow{ZY} = \frac{1}{b_1+\ldots+b_m}(b_1\overrightarrow{ZY_1} + \ldots + b_m\overrightarrow{ZY_m})$.
Jeżeli punkt S jest środkiem ciężkości punktów X i Y z masami a i b, to
$\overrightarrow{ZS} = \frac{1}{a+b}(a\overrightarrow{ZX} + b\overrightarrow{ZY}) = \frac{1}{a+b}(a_1\overrightarrow{ZX_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{ZX_n} + b_1\overrightarrow{ZY_1} + \ldots + b_m\overrightarrow{ZY_m})$, a to znaczy, że punkt S jest również środkiem ciężkości punktów $X_1,\ldots, X_n, Y_1,\ldots, Y_m$ z masami $a_1,\ldots, a_n, b_1,\ldots, b_m$.

Znając podstawowe własności środka ciężkości, możemy przystąpić do wspólnego rozwiązywania zadań.

Zad. 1. Wykaż, że środkowe w trójkącie przecinają się w jednym punkcie, który dzieli te środkowe w stosunku 2:1, licząc od wierzchołka.
Rozwiązanie. Niech punkty A_1, B_1, C_1 będą środkami odpowiednio boków BC, AC, AB trójkąta ABC (rys. 7). Umieśćmy w każdym wierzchołku trójkąta ABC masę równą 1 i niech punkt S będzie środkiem ciężkości tego układu. Zatem S jest także środkiem ciężkości układów par punktów: A_1 o masie 2 i A o masie 1, B_1 o masie 2 i B o masie 1, C_1 o masie 2 i C o masie 1. To oznacza, że środkowe A_1A, B_1B i C_1C przecinają się



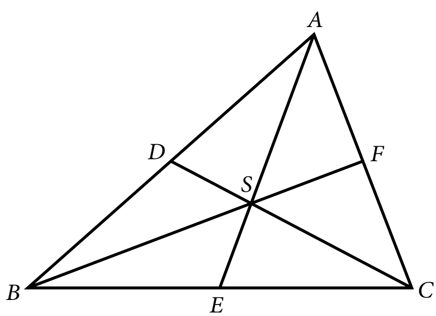
Rys. 7

w punkcie S, gdyż z własności 2 istnieje tylko jeden środek ciężkości. Dalej, ponieważ S jest środkiem ciężkości układu punktów A_1 o masie 2 i A o masie 1, spełniony jest warunek: $\frac{AS}{SA_1} = \frac{2}{1}$, zatem S dzieli środkową A_1A w stosunku 2:1, licząc od wierzchołka. Analogicznie pokazujemy, że S dzieli środkowe B_1B i C_1C w podanym stosunku.

Zauważmy, że punkt S, który jest środkiem ciężkości punktów A, B, C z masami równymi 1, jest także środkiem ciężkości całego trójkąta (kawałka płaszczyzny z równomiernie rozłożoną masą). Tę własność trójkąta i jego wierzchołków udowodnił Archimedes w pracy „O równowadze figur płaskich".

Kolejne zadanie pokazuje, jak za pomocą metody środków ciężkości udowodnić twierdzenie Cevy.

Zad. 2. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC zaznaczono odpowiednio punkty D, E i F. Żadne dwie z prostych DC, EA i FB nie są równoległe. Wykaż, że proste DC, EA i FB przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy że $\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{BC}\cdot\frac{CF}{FA} = 1$.
Rozwiązanie. Rozmieśćmy w punktach A, B i C masy a, b i c, aby spełnione były warunki: $\frac{AD}{DB} = \frac{b}{a}$ i $\frac{BE}{EC} = \frac{c}{b}$. Niech punkt S będzie punktem przecięcia odcinków DC i EA (rys. 8). Aby rozwiązać zadanie, należy pokazać, że odcinek FB przechodzi przez punkt S wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{CF}{FA} = \frac{a}{c}$.



Rys. 8

Ponieważ D jest środkiem ciężkości punktów A i B z masami a i b, natomiast E jest środkiem ciężkości punktów B i C z masami b i c, punkt S musi być środkiem ciężkości punktów A, B i C z masami a, b i c. Zatem jeżeli odcinek FB przechodzi przez punkt S, to F jest środkiem ciężkości punktów C i A z masami c i a, czyli zachodzi warunek $\frac{CF}{FA} = \frac{a}{c}$.
Jeśli natomiast zachodzi warunek $\frac{CF}{FA} = \frac{a}{c}$, to punkt F jest środkiem ciężkości punktów C, A z masami c, a, a zatem punkt S leży na odcinku FB, ckd.

Zad. 3. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC zaznaczono odpowiednio punkty D, E, F w taki sposób, że proste DC, EA i FB przecinają się w punkcie S. Wykaż, że: a) $\frac{CS}{SD} = \frac{CE}{EB}+\frac{CF}{FA}$, b) $\frac{ES}{EA}+\frac{FS}{FB}+\frac{DS}{DC} = 1$.

Rozwiązanie. Rozmieśćmy w punktach A, B, C takie masy dodatnie a, b, c, aby spełnione były warunki: $\frac{AD}{DB} = \frac{b}{a}$, $\frac{BE}{EC} = \frac{c}{b}$ i $\frac{CF}{FA} = \frac{a}{c}$. Wówczas punkt S jest środkiem ciężkości punktów A, B, C z masami a, b, c, punkt D – punktów A, B z masami a, b, punkt E – punktów B, C z masami b, c, zaś punkt F – punktów C, A z masami c, a. Zatem

a) $\frac{CS}{SD} = \frac{a+b}{c} = \frac{b}{c}+\frac{a}{c} = \frac{CE}{EB}+\frac{CF}{FA}$.

b) $\frac{EA}{ES} = \frac{ES+SA}{ES} = 1+\frac{SA}{ES} = 1+\frac{b+c}{a} = \frac{a+b+c}{a}$.

Analogicznie można wykazać, że $\frac{FB}{FS} = \frac{a+b+c}{b}$ i $\frac{CS}{CD} = \frac{a+b+c}{c}$, a stąd $\frac{ES}{EA}+\frac{FS}{FB}+\frac{DS}{DC} = \frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c} = 1$.

Zad. 4. W trójkącie ABC na boku BC leży punkt M, na boku AC – punkt N, a odcinki AM i BN przecinają się w punkcie P. Mając dane stosunki $BM : MC = m$ i $AN : NC = n$, oblicz stosunki $AP : PM$ i $BP : PN$.

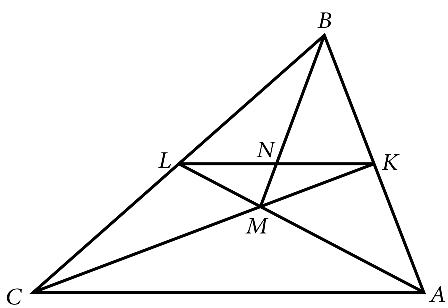
Rozwiązanie. W punktach A, B i C umieśćmy masy odpowiednio a, b i c. Ponieważ zachodzi $BM : MC = m$, aby punkt M był środkiem ciężkości punktów C i B, musi być $m = \frac{BM}{MC} = \frac{c}{b}$, więc $b = \frac{c}{m}$. Analogicznie pokazujemy, że $a = \frac{c}{n}$. Ponieważ P jest środkiem ciężkości układu punktów A, B i C z masami a, b, c, to jest także środkiem ciężkości układu punktów A i M z masami odpowiednio $\frac{c}{n}$ i $\frac{c}{m}+c$ (gdyż układ punktów B i C z masami $\frac{c}{m}$ i c można zastąpić punktem M z masą $\frac{c}{m}+c$). Wobec tego zachodzi

$\frac{AP}{PM} = \frac{\frac{c}{m}+c}{\frac{c}{n}} = n\left(1+\frac{1}{m}\right)$. Analogicznie pokazujemy, że $\frac{BP}{PN} = m\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Zad. 5. Na bokach AB i BC trójkąta ABC znajdują się odpowiednio punkty K i L. Niech punkt M będzie punktem przecięcia odcinków AL i CK, natomiast N – punktem przecięcia KL i BM.

Wykaż, że $\frac{AK \cdot BC}{LC \cdot AB} = \frac{KN}{NL}$.

Rozwiązanie. Niech $\frac{BK}{AK} = p$ i $\frac{BL}{CL} = q$ (rys. 9). Umieśćmy w punktach A, B, C odpowiednio masy p, 2, q. Wykażemy, że punkt N jest środkiem ciężkości trójkąta ABC.



Rys. 9

Punkt K jest środkiem ciężkości punktów A i B z masami p i 1, a punkt L– środkiem ciężkości punktów C i B z masami q i 1. Dlatego środek ciężkości O punktów A, B, C z masami p, 2, q leży na odcinku KL i dzieli go w stosunku $\frac{KO}{OL} = \frac{q+1}{p+1}$. Punkt M jest środkiem ciężkości punktów A, B, C z masami p, 1, q.

Punkt O jest zatem środkiem ciężkości układu punktów M z masą $p + q + 1$ i B z masą 1, a ponieważ O leży na odcinku MB, pokrywa się z N. Stąd mamy $\frac{AK}{AB} \cdot \frac{BC}{LC} = \frac{1}{p+1} \cdot \frac{q+1}{1} = \frac{KN}{NL}$.

I znowu seria zadań do samodzielnej pracy.

Zad. 6. W jakim stosunku przecinają się:
a) dwusieczne kątów trójkąta?
b) wysokości trójkąta ostrokątnego?

Zad. 7. Trzy muchy o masie 1 każda chodzą po bokach trójkąta *ABC* w ten sposób, że ich środek ciężkości znajduje się stale w tym samym punkcie. Wykaż, że środek masy much pokrywa się z punktem przecięcia środkowych trójkąta *ABC*, jeżeli wiadomo, że jedna mucha przeszła po całym obwodzie trójkąta.

Zad. 8. Półprosta *BD* jest dwusieczną kąta *B* w trójkącie *ABC* (*D* znajduje się na boku *AC*). Punkt *O* leży na odcinku *BD* w taki sposób, że $\frac{BO}{OD} = \frac{m}{n}$. Prosta *OA* przecina prostą *BC* w punkcie *K*. Oblicz wartość $\frac{BK}{KC}$, jeżeli wiadomo, że $\frac{AB}{BC} = \frac{p}{q}$.

Zad. 9. Pole trójkąta *ABC* jest równe 1. Na środkowej *BK* znajduje się punkt *M* spełniający warunek $4MK = BK$. Prosta *AM* przecina bok *BC* w punkcie *L*. Oblicz pole trójkąta *ALC*.

Zad. 10. (III MOM) Punkt *O* należy do wnętrza trójkąta *ABC*, a *A'*, *B'* i *C'* są punktami przecięć prostych *AO, BO* i *CO* z przeciwległymi bokami trójkąta. Udowodnij, że spośród wyrażeń $\frac{OA}{OA'}$, $\frac{OB}{OB'}$ i $\frac{OC}{OC'}$ przynajmniej jedno jest nie większe niż 2 i przynajmniej jedno jest nie mniejsze niż 2.

Zad. 11. Dany jest wypukły czworokąt *ABCD* oraz punkty *P, R, S, T* będące środkami boków *AB, BC, CD* i *DA*. Wykaż, że punkt przecięcia odcinków *PS* i *RT* jest środkiem:
a) tych odcinków,
b) odcinka łączącego środki przekątnych czworokąta *ABCD*.

Zad. 12. Wykaż, że odcinki łączące wierzchołki czworościanu ze środkami ciężkości przeciwległych ścian przecinają się w jednym punkcie, który dzieli te odcinki w stosunku 3:1, licząc od wierzchołka.

Zad. 13. Wykaż, że w odcinki łączące środki skośnych krawędzi czworościanu przecinają się w jednym punkcie.

Zad. 14. Niech punkty *K, L, M, N, O, P* będą środkami boków *AB, BC, CD, DE, EF, FA* dowolnego sześciokąta. Wykaż, że punkty przecięć środkowych trójkątów *KMO* i *LNP* pokrywają się.

Zad. 15. Na bokach *AB, BC, CD, DA* wypukłego czworokąta *ABCD* leżą odpowiednio punkty *K, L, M, N* spełniające warunki: $AK:KB = DM:MC = \alpha$ i $BL:LC = AN:ND = \beta$. Niech *P* będzie punktem przecięcia odcinków *KM* i *LN*. Wykaż, że $NP:PL = \alpha$ i $KP:PM = \beta$.

Zad. 16. (Obóz OM Zwardoń 2005) Dla punktu *S* leżącego wewnątrz trójkąta *ABC* oznaczmy przez *D*, *E*, *F* punkty przecięcia odpowiednio prostej *AS* i boku *BC*, prostej *BS* i boku *CA*, prostej *CS* i boku *AB*. Wyznacz zbiór takich punktów *S*, że suma pól trójkątów *SAF, SBD* i *SCE* jest równa połowie pola trójkąta *ABC*.

Zad. 17. (XXVI OM, I etap) W czworokącie płaskim wypukłym $ABCD$ wybrano na przeciwległych bokach AB i CD punkty P i R, a na bokach AD i BC punkty Q i S w taki sposób, że $\frac{AP}{PB} = \frac{DR}{RC} = a$ oraz $\frac{AQ}{QD} = \frac{BS}{SC} = b$. Udowodnij, że jeżeli O jest punktem przecięcia odcinków PR i QS, to zachodzi: $\frac{PO}{OR} = b$ i $\frac{QO}{OS} = a$.

Zad. 18. (I OM, I etap) Środki czterech jednakowych kul leżą na okręgu, a środek ciężkości układu tych kul leży w środku okręgu. Wykaż, że środki kul są wierzchołkami prostokąta.

3. Seminaria uczniowskie

Michał Śliwiński, Wrocław

Odmiennym od kółek matematycznych sposobem pozalekcyjnego stymulowania matematycznego rozwoju uczniów uzdolnionych, który dla wielu może się stać niezwykle atrakcyjny, są seminaria uczniowskie, czyli popołudniowe lub weekendowe spotkania, podczas których jeden lub kilku uczniów prezentuje kolegom opracowany przez siebie temat. Poniżej opisuję przykłady takich zajęć realizowanych w klasach uniwersyteckich III Liceum Ogólnokształcącego we Wrocławiu.

Namiastka atmosfery akademickiej w szkole

Seminaria są niezwykle ciekawą formą pracy z uczniami o zainteresowaniach ścisłych, ale o różnym stopniu zaawansowania matematycznego. Stwarzają wiele możliwości interakcji między ich uczestnikami, którzy chętnie się uczą od swoich rówieśników. Referentem jest zwykle uczeń o większych umiejętnościach – jemu samemu seminarium daje z kolei możliwość uporządkowania swojej wiedzy, rozwinięcia umiejętności jej prezentacji oraz publicznego występowania, chociaż odbywa się w przyjaznym, znanym otoczeniu.

Tematy seminariów mogą być wybrane z listy przygotowanej przez nauczyciela lub wybrane przez samych uczniów i przez nauczyciela zatwierdzone. Powinny być dostosowane do zainteresowań oraz poziomu wiedzy zarówno referenta, jak i słuchaczy. Mogą to być klasyczne zagadnienia spoza programu nauczania, których znajomość przydaje się na przykład w zadaniach olimpijskich (np. twierdzenie Cevy), albo tematy, którymi słuchacze zainteresowali się podczas wykładów popularnonaukowych lub o których gdzieś przeczytali. Mogą to być również wyniki samodzielnej pracy prelegenta – ciekawe rozwiązanie jakiegoś zadania lub rezultaty badań nad jakimś problemem (np. otrzymane w efekcie pisania pracy konkursowej). Niektóre seminaria mogą mieć charakter roboczy i być zwoływane *ad hoc*, na przykład w celu wspólnego rozwiązania jakiegoś zadania olimpijskiego, z którym ma kłopot jeden z uczniów – wtedy on referuje problem i swoje przemyślenia, albo by pomóc koledze, który się natknął na trudny do przezwyciężenia problem w swojej pracy i potrzebuje świeżego spojrzenia i dyskusji z kolegami.

Jak zorganizować pracę seminarium uczniowskiego

Na ogół temat seminarium powinien być ustalony z prelegentem kilka tygodni przed spotkaniem. W tym czasie nauczyciel monitoruje przygotowania referenta i stosownie do jego poziomu zaawansowania matematycznego i samodzielności mniej lub bardziej pomaga w przygotowaniach, służąc swoją wiedzą lub podsuwając odpowiednią lekturę. Wykład ucznia może się opierać na konkretnym artykule lub może być opracowany samodzielnie. Prelegent powinien przygotować konspekt wystąpienia i omówić z nauczycielem zawartość i przebieg odczytu, kolejność poruszanych zagadnień i czas potrzebny na ich przedstawienie. Powinien też wynotować potrzebne definicje, przygotować przykłady ilustrujące nowe pojęcia i zadania pokazujące zastosowanie prezentowanych twierdzeń.

Samo spotkanie może być prowadzone w dowolnej formie. Referent powinien mieć swobodę wypowiedzi, ale nauczyciel musi być gotów do pomocy i w razie potrzeby go poprawić lub pokierować tak, by słuchacze odnieśli maksimum korzyści. Na posiedzenia seminarium można też zapraszać innych nauczycieli w charakterze słuchaczy lub konsultantów. Warto zadbać, by atmosfera była luźna, niestresująca dla żadnej ze stron, ale sprzyjająca skupieniu. Miło jest, gdy uczestnicy przygotują napoje lub drobny poczęstunek.

Przebieg seminarium może być podobny do wykładu lub pokazu (multimedialnego) albo zbliżony do lekcji ćwiczeniowej, podczas której uczniowie odpowiadają na pytania, rozwiązują zadania lub pracują w mniejszych grupach. Ważne jest, żeby wszyscy słuchacze mogli zadawać pytania, wyrażać wątpliwości, prosić o powtórzenie niejasnego dla nich fragmentu rozumowania lub o więcej przykładów wyjaśniających definicję i swobodnie prowadzić dyskusję. Rola nauczyciela jest drugoplanowa, ale bardzo ważna. Powinien umiejętnie sterować przebiegiem spotkania, aby dostosować tempo do możliwości i potrzeb słuchaczy, zwracać uwagę na istotne szczegóły lub pomijać mniej istotne szczegóły techniczne, weryfikować stopień zrozumienia tematu wśród słuchaczy, a w razie potrzeby studzić ich ożywienie i emocje.

Jednemu tematowi można w razie potrzeby poświęcić więcej spotkań, ale to może zniechęcić uczniów niezainteresowanych danym zagadnieniem czy takich, którzy opuścili spotkania wcześniejsze lub się na nich zgubili.

Seminaria, jak miałem okazję się przekonać, cieszą się bardzo dużym zainteresowaniem uczniów. Nie ma też kłopotu ze znalezieniem chętnych prelegentów, uczniowie bardzo często sami proponują tematy spotkań. Charakter takich zajęć jest inny niż kółka matematycznego, sprawia wrażenie wyższego poziomu wtajemniczenia, naśladującego poważne spotkania naukowe w gronie zainteresowanych zapaleńców. Nawet jeśli w seminarium bierze udział niewielka grupa, to korzyści mogą być tym większe, jako że siłą rzeczy wszyscy są zmuszeni do aktywnego udziału. Przy okazji tego typu zajęć pozalekcyjnych uczniowie chętnie się integrują i poznają. Atmosfera sprzyja naukowej dyskusji, przy czym tracą znaczenie różnice w wiedzy matematycznej, ponieważ większość seminariów dotyczy zagadnień raczej obcych ogółowi, a opanowanych tylko przez referenta.

Po jakimś czasie wyłania się kilkuosobowa grupa szczególnie zapalonych bywalców seminarium, którzy czują się jego gospodarzami, i to oni poczuwają się do organizowania wszystkiego, zarówno miejsca i sprzętu (ustawienie ławek, rzutnik, poczęstunek), jak i audytorium (zaproszenie kolegów zainteresowanych poszczególnymi zajęciami). W III LO seminaria uczniowskie mają wieloletnią tradycję. Gościły (jako prelegentów lub słuchaczy) wielu późniejszych studentów i doktorantów matematyki, nierzadko naprawdę wybitnych. Zdarzało się, że absolwenci chętnie wracali na szkolne seminaria, aby opowiedzieć młodszym kolegom o czymś, co ich właśnie zafascynowało lub nad czym sami teraz pracują.

Tematyka seminariów

Na zajęciach naszego szkolnego seminarium poruszane było wiele tematów. Poniżej podaję przykłady kilku zagadnień, gdyż dobrze ilustrują szeroki wachlarz zainteresowań uczestników i różnice w stopniu matematycznego zaawansowania:

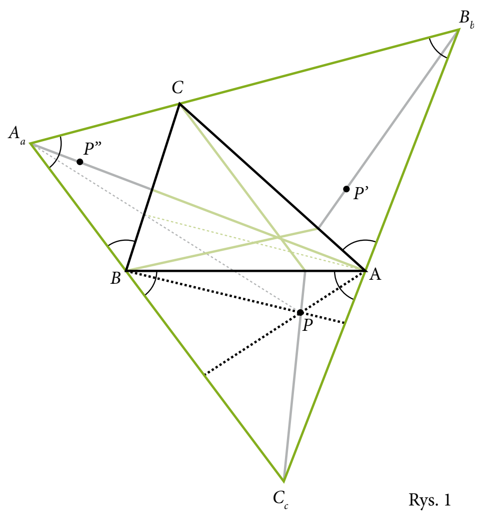
- kongruencje liczbowe
- paradoksy probabilistyczne
- wzór Picka
- arytmetyka wyborów parlamentarnych (temat zaproponowany i opracowany samodzielnie przez uczniów)
- wielomiany Czebyszewa (praca własna ucznia)

Wiele z nich można byłoby omówić na poziomie gimnazjalnym.

Na jednym z posiedzeń swoją oryginalną pracę pt. „Przychodzi Euler do Nagela" prezentował uczeń III LO we Wrocławiu (obecnie doktorant w Instytucie Matematycznym UWr), Michał Marcinkowski. Praca ta zdobyła później złoty medal w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki organizowanym przez miesięcznik „Delta" (2005) oraz II nagrodę i nagrodę dodatkową w Konkursie Prac Młodych Naukowców Unii Europejskiej (2006). Aby oddać tematykę, stopień trudności pracy i poziom elementarności stosowanych metod, przytoczę tu – za zgodą autora – fragment tej pracy. Całość można znaleźć w „Delcie" 2006, nr 4 (383).

Przychodzi Euler do Nagela

Rozważmy następującą konstrukcję. Dla danego trójkąta ABC prowadzimy dwusieczne jego kątów zewnętrznych (ciemnozielone odcinki na rys. 1). Tworzą one trójkąt $A_aB_bC_c$, którego każdy wierzchołek jest środkiem pewnego okręgu dopisanego do trójkąta ABC. Nowo powstałe trójkąty ABC_c, BCA_a i CAB_b nazywamy trójkątami dopisanymi. Nietrudno zauważyć, że trójkąty dopisane są parami podobne. Następnie wybieramy względem trójkąta ABC_c pewien punkt P. Niech punkt P' będzie obrazem punktu P w podobieństwie przekształcającym trójkąt ABC_c w trójkąt CAB_b. Analogicznie wyznaczamy punkt P'' w trzecim trójkącie dopisanym. Teraz przez punkty C_c i P prowadzimy szary odcinek. Odpowiadający mu jasnozielony odcinek wyznaczony jest przez punkt C i punkt przecięcia szarego odcinka z prostą AB lub jest równoległy do AB, gdy szary odcinek jest równoległy do AB. Analogicznie konstruujemy dwa pozostałe szare odcinki w dwóch pozostałych trójkątach dopisanych oraz odpowiadające im odcinki jasnozielone.



Rys. 1

Twierdzenie 1. Jasnozielone proste przecinają się w jednym punkcie.

Dowód. Ograniczymy się do przypadku, gdy wszystkie trzy szare odcinki przecinają się z odpowiednimi bokami (lub ich przedłużeniami) wyjściowego trójkąta. Zauważmy, że przerywany odcinek przechodzący przez punkty B i P jest odpowiedni do szarego przechodzącego przez B_b i P' (bo w omawianym wyżej podobieństwie punkt *B* przechodzi na B_b, a *P* na *P*'). Również przerywany odcinek przechodzący przez *A* i *P* jest odpowiedni do szarego przechodzącego przez A_a i *P*''. W takim razie jasnozielone odcinki dzielą boki *AB*, *BC* i *CA* (lub ich przedłużenia) tak samo jak dwa przerywane i jeden szary odcinek dzielą boki trójkąta ABC_c (lub ich przedłużenia). Ponieważ te trzy odcinki w trójkącie ABC_c przecinają się w jednym punkcie, na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy, jasnozielone też przecinają się w jednym punkcie, ckd.

Widzimy, że jeżeli względem pewnego trójkąta dopisanego (np. ABC_c) obierzemy punkt *P*, to *P* jednoznacznie wyznacza punkty *P*' i *P*'' odpowiadające mu w pozostałych trójkątach dopisanych. Ta trójka punktów wyznacza z kolei punkt przecięcia jasnozielonych prostych. Można więc powiedzieć, że powyższa konstrukcja jest przekształceniem punktu *P* w punkt wspólny tych prostych. Okazuje się, że tak zdefiniowane przekształcenie ma wiele ciekawych właściwości, których opis był głównym celem pracy konkursowej.

Nietrudno na przykład zauważyć, że obrazem środka ciężkości trójkąta ABC_c jest środek ciężkości trójkąta *ABC*. Istnieje jednak więcej szczególnych punktów trójkąta ABC_c, których obrazy są szczególnymi punktami trójkąta *ABC*. Przedstawia to poniższa tabela.

Punkt w trójkącie ABC_c	**Obraz w trójkącie *ABC***
środek okręgu opisanego (O)	środek okręgu wpisanego (I)
środek ciężkości (G)	środek ciężkości (*G*')
punkt Eulera (*E*)	punkt Spiekera (*S*)
ortocentrum (*H*)	punkt Nagela (*N*)

Przypomnijmy, że punkt Eulera to środek okręgu 9 punktów danego trójkąta. Dwa kolejne pojęcia wymagają dodatkowych wyjaśnień. Punkt Nagela to punkt przecięcia odcinków łączących wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgów dopisanych do przeciwległych boków tego trójkąta, a punkt Spiekera to środek okręgu wpisanego w trójkąt powstały przez połączenie środków boków trójkąta wyjściowego.

Ważną cechą badanego przekształcenia jest też jego afiniczność (dokładniej: przekształcenie jest powinowactwem osiowym wyznaczonym przez wektor $\overrightarrow{C_cC}$ i prostą *AB*). Dodatkowo dowolnie wybrana prosta, jej obraz i prosta *AB* spotykają się w jednym punkcie lub są równoległe (wektor $\overrightarrow{C_cC}$ i oś *AB* są tutaj wyróżnione, ponieważ przekształcamy względem trójkąta ABC_c).

4. Warsztaty olimpijskie

Jacek Dymel, Kraków

Istotnym elementem przygotowań uczniów do startu w olimpiadzie jest organizacja warsztatów matematycznych jako swoistego treningu kondycyjnego i szlifowania formy bezpośrednio przed zawodami. Podobne zajęcia w formie wyjazdowej są organizowane w wielu szkołach tradycyjnie kształcących olimpijczyków z matematyki, na przykład w liceach XIV w Warszawie i we Wrocławiu. Taki charakter ma też obóz OM w Zwardoniu odbywający się przed zawodami międzynarodowymi. W artykule opisuję warsztaty, w jakich przez kilka lat uczestniczyli uczniowie II LO z Krakowa.

Czym są warsztaty olimpijskie?

Jest to specyficzna forma pracy z uczniami uzdolnionymi. Warsztaty mogą się odbywać stacjonarnie w szkole lub w wersji wyjazdowej, co jest bardziej korzystne ze względu na pewne odizolowanie uczniów od innych spraw i możliwość skupienia się tylko na matematyce. Takie zajęcia mają na celu intensywne przygotowanie do udziału w Olimpiadzie Matematycznej.

Prawdziwe uczenie się nie może polegać tylko na pobieraniu informacji. Poprzez wysłuchanie wykładu można przyswoić jakiś fragment wiedzy, niekoniecznie umiejąc się nią posługiwać w sytuacji problemowej. W ten sposób nie udaje się na ogół ćwiczyć twórczego i logicznego myślenia. Warsztat łączy w sobie elementy treningu umysłowego i zdobywania nowej wiedzy. Uczniowie poprzez aktywny udział w zajęciach warsztatowych mają okazję wymieniać się własnymi doświadczeniami, jak również korzystać z wiedzy i kompetencji osób je prowadzących. Przede wszystkim uczą się praktycznych umiejętności potrzebnych do rozwiązywania zadań, których opanowanie sprawdzają potem w formie konkursu.

Jak zorganizować warsztaty?

Jak długo powinien trwać taki „obóz kondycyjny”? Można zorganizować warsztaty 2–3-dniowe (np. weekendowe) i wtedy mogą się odbywać w szkole. Optymalne wydają się warsztaty 5-dniowe w formie wyjazdowej. Można zorganizować nawet warsztaty 10–14-dniowe, jednak intensywność przyswajania wiedzy będzie malała wraz z upływem czasu. Im krótsze warsztaty, tym zajęcia mogą być bardziej intensywne. W przypadku warsztatów długich trzeba zajęcia dozować ostrożnie i pamiętać o dniach odpoczynku.

Jeżeli warsztaty odbywają się w szkole, dobrze jest zapewnić komfort pracy z dala od zgiełku szkolnego korytarza. Dobrym terminem są ferie czy weekendy, gdy w szkole nie odbywają się inne zajęcia. W przypadku warsztatów wyjazdowych, warto zadbać o miejsce z wygodnym noclegiem (pokoje 2–3-osobowe) i co najmniej dwoma dobrze oświetlonymi salami wykładowymi, z warunkami do pisania konkursów (wygodne stoliki i krzesła, a nie ławy, sofy i fotele). Sale wykładowe powinny być wyposażone w tablice (najlepiej duże). Jeśli ośrodek ich nie posiada, można wypożyczyć je z miejscowej szkoły lub nawet przywieźć ze sobą (dostępne są teraz lekkie tablice przenośne lub flipcharty, które mają też tę zaletę, że zawsze dają możliwość powrotu do wcześniej zapisanych kart).

Jak często organizować warsztaty? To zależy od możliwości czasowych nauczyciela. W ciągu roku sensownie jest zorganizować od jednego do trzech warsztatów. Pierwsze na początku roku, kiedy rozpoczyna się I etap olimpiady. Na takie warsztaty powinni pojechać głównie uczniowie I klas, których wiedza matematyczna wyniesiona z gimnazjum nie zawsze umożliwia uporanie się z zadaniami olimpijskimi i nierzadko mają kłopot nawet ze zrozumieniem ich treści. Dzięki warsztatom mają szansę w krótkim czasie opanować podstawowe pojęcia i metody związane z matematyką olimpijską. Dla uczniów klas starszych takie warsztaty są okazją do odświeżenia wiedzy po wakacjach, a trwający I etap olimpiady dobrze motywuje ich do pracy. Drugie warsztaty warto zorganizować przed zawodami II etapu, gdy wiadomo już, którzy uczniowie zostali do nich zakwalifikowani. Uczniowie ci są szczególnie zmotywowani do pracy, ponieważ to właśnie ten etap decyduje o olimpijskim sukcesie, czyli o awansie do finału OM. Przed zawodami III etapu warto zrobić krótkie, stacjonarne 2–3-dniowe warsztaty w formie 5-godzinnych konkursów. Ta forma pracy nie jest nastawiona głównie na zdobywanie wiedzy, lecz na przygotowanie „kondycyjne". Zajęci sprawami szkolnymi i domowymi uczniowie rzadko mają okazję przez pięć godzin zastanawiać się nad rozwiązywaniem zadań. Po finałach OM zwykle motywacja uczniów do pracy maleje, tym bardziej że pod koniec roku szkolnego nie odbywają się już żadne konkursy. Jednak ten luźniejszy czas można wykorzystać na warsztaty wyjazdowe, aby podtrzymać zainteresowanie rozwiązywaniem zadań przed zbliżającymi się wakacjami.

Na zajęciach wygodnie jest podzielić uczestników warsztatów na grupę początkującą oraz tych, którzy poznali już podstawy matematyki olimpijskiej a być może uda się stworzyć także niedużą supergrupę uczniów, którzy mieli już znaczące osiągnięcia olimpijskie i mogą pracować na najwyższym poziomie. W jednej szkole na ogół trudno taką grupę zebrać, dlatego najlepiej zorganizować warsztaty międzyszkolne lub do supergrupy zaprosić kilku uczniów z zaprzyjaźnionych szkół. W warsztatach, które współorganizowałem, brali także udział uczniowie z V LO w Bielsku-Białej, I LO w Krośnie i I LO w Piotrkowie Trybunalskim. Dużą zaletą warsztatów międzyszkolnych jest możliwość rozłożenia obowiązków organizacyjnych na kilka osób z różnych szkół lub wzięcie na siebie obowiązku organizacji całości raz na kilka lat. Uczniowie z kolei zyskują możliwość poznania kolegów i nauczycieli z innych ośrodków, podpatrywania ich stylu pracy i prowadzenia z nimi rozmów o matematyce.

Bardzo istotne jest zapewnienie odpowiedniej opieki merytorycznej. Warto zaprosić na warsztaty pracowników naukowych lub nauczycieli z zaprzyjaźnionych szkół. Powinny być to jednak osoby doświadczone w pracy z uzdolnioną młodzieżą, z dobrym wyczuciem dydaktycznym. Zaplanowanie zajęć na zbyt trudne tematy, bez wyczucia co jest dla uczniów zrozumiałe, może prowadzić do ich zniechęcenia. Bardzo dobrym rozwiązaniem jest zaproszenie absolwentów własnej szkoły, którzy byli olimpijczykami lub studiują matematykę. Z obserwacji przebiegu warsztatów w wielu szkołach wynika, że absolwenci bardzo chętnie podejmują się pomocy młodszym kolegom ze względu na sentyment, jaki mają do szkoły. Często sami byli uczestnikami takich warsztatów i wiedzą, jakie wynieśli z nich korzyści.

Na warsztatach zwyczajem jest, aby część zajęć dla kolegów przygotowywali sami uczniowie (podobnie jak na opisanych we wcześniejszym rozdziale seminariach uczniowskich). Każdy uczestnik warsztatów otrzymuje propozycję tematu do przygotowania. Uczniom dopiero rozpoczynającym przygodę z matematyką olimpijską można dać konkretny artykuł lub fragment rozdziału książki, aby po zapoznaniu się z jego treścią, przekazali kolegom własnymi słowami wiedzę tam zawartą. Bardziej zaawansowanym można zaproponować konkretne zagadnienie i podsunąć pomocne materiały. Każdy omawiany temat warto zilustrować kilkoma związanymi z nim zadaniami olimpijskimi. Wykład powinien trwać od 45 do 90 minut. Zbyt krótki nie daje możliwości głębszego zapoznania się z tematem, a zbyt długi staje się nużący dla słuchaczy.

Zalecamy, aby referujący zapisali wcześniej cały tekst swojego wystąpienia na przykład w texu. Dzięki temu poznają edytor tekstu, którym posługują się matematycy na całym świecie, poza tym da im to gwarancję lepszego zaplanowania i przygotowania zajęć, a także umożliwi słuchaczom dostęp do notatek, zadań i ich rozwiązań, gdyby czegoś podczas wykładu nie zrozumieli. Teksty wszystkich referatów można zebrać w jedną broszurę i zamieścić na stronie internetowej lub nawet wydać w formie papierowej. Będzie to doskonała pomoc dydaktyczna na przyszłość.

Codziennie podczas warsztatów powinien się odbyć indywidualny konkurs zadaniowy. Skoro uczniowie będą uczestniczyć w zawodach olimpiady, przyzwyczajenie ich do samodzielnej, kilkugodzinnej pracy pozwoli im lepiej się do nich przygotować. Zadania konkursowe powinny nawiązywać do tematyki zajęć, jakie odbyły się już na warsztatach. Wówczas uczeń może przekonać się, że wiedza i umiejętności nabyte na wykładach przynoszą wymierne efekty, a to zachęca do dalszej pracy w kolejnych dniach. Na zawodach OM każdego dnia uczestnicy rozwiązują trzy zadania z różnych działów matematyki, dlatego na konkursach warsztatowych warto zachować podobną liczbę i strukturę zadań. Po każdym konkursie zadania muszą być na gorąco omówione. Uczniowie, którzy danego zadania nie rozwiązali, dowiedzą się, jak można to było zrobić, a inni będą mogli poprawić usterki w swoich rozwiązaniach lub zaproponować pomysły lepsze, krótsze, bardziej eleganckie lub wymagające całkiem innych metod. Konkretne zadania mogą też być omówione w szerszym kontekście. Zadania konkursowe przygotowują na ogół absolwenci i to oni prowadzą potem omówienie konkursu.

Typowy dzień na naszych warsztatach wygląda tak:
- 8.00–9.00 – śniadanie
- 9.00–12.30 – zajęcia
- 13.00–14.00 – obiad
- 14.00–15.00 – zajęcia
- 15.30–18.30 – indywidualny konkurs zadaniowy
- 18.30–19.00 – kolacja
- 19.30–20.30 – omówienie zadań konkursowych z danego dnia

Jeden dzień warsztatów warto poświęcić na zorganizowanie meczu matematycznego. To lubiana przez uczniów forma rywalizacji, ale też nauki. Zasady meczu zostały już opisane w tym poradniku. Można też wzorować się na zasadach meczu z obozu naukowego Olimpiady Matematycznej w Zwardoniu, które ze względu na wyczynowy poziom uczestników różnią się trochę od zasad klasycznych. Na stronie www.om.edu.pl znajdują się broszury z tych obozów, w których można znaleźć regulamin meczu oraz zestawy zadań. Uczniowie podzieleni na dwie grupy otrzymują zestaw tych samych zadań i mają około sześciu godzin na ich rozwiązanie i nauczenie wszystkich rozwiązań każdego z członków grupy. Potem następuje rozgrywka, w czasie której uczniowie z różnych grup na zmianę rozwiązują zadania (przeciwnik wskazuje numer zadania i osobę, która ma je zrobić). Każde wystąpienie uczniów przy tablicy jest oceniane przez kadrę warsztatów.

Tematyka warsztatów

Tematyka wykładów na warsztatach musi być dostosowana do umiejętności uczniów. Dla uczniów z grupy początkującej (głównie z klas pierwszych) niezbędne jest wprowadzenie podstawowych pojęć i metod matematyki olimpijskiej. Do takich należą:

- zasada indukcji matematycznej,
- zasada maksimum,
- zasada szufladkowa Dirichleta,
- metoda niezmienników,
- kongruencje,
- podstawowe pojęcia kombinatoryki,
- równania funkcyjne,
- równania diofantyczne,
- metody dowodzenia nierówności,
- przystawanie i podobieństwo trójkątów,
- czworokąty wpisane i opisane,
- izometrie płaszczyzny,
- jednokładność.

Dla grupy zaawansowanej wprowadzamy wykłady, które wymagają już większej wiedzy i umiejętności. Oto przykładowe tematy zajęć:

- inwersja na płaszczyźnie,
- nierówność między średnimi,
- nierówność Cauchy'ego-Schwarza,
- wielomiany i twierdzenie Bezouta,
- chińskie twierdzenie o resztach,
- półniezmienniki,
- wielomiany symetryczne i wzory Viete'a,
- twierdzenie Pascala i własności elipsy,
- własności przekształceń afinicznych,
- własności przekształceń rzutowych,
- małe twierdzenie Fermata i twierdzenie Eulera,
- liczby zespolone w geometrii,
- środek mas w zadaniach geometrycznych,
- ciągi rekurencyjne,
- własności geometryczne krzywych stożkowych,
- własności iloczynu skalarnego i wektorowego.

Na kolejnych warsztatach część tematów może się powtarzać. Często okazuje się, że dopiero po kilku powrotach do danego tematu uczniowie zaczynają w pełni rozumieć zastosowania pokazywanej metody czy twierdzenia.

Zamiast zakończenia

Zachęcając nauczycieli do organizowania wyjazdowych warsztatów olimpijskich, warto jeszcze raz podkreślić ich zalety. Tymi samymi argumentami nauczyciel może się posłużyć, by potem zachęcać swoich uczniów do udziału w warsztatach.

- Uczniowie mogą się skupić na matematyce, nie rozpraszają ich inne zajęcia.
- W krótkim czasie znacząco podnosi się poziom umiejętności uczniów, nawet z grupy początkującej.
- Uczniowie mają okazję do rozmów w gronie osób zainteresowanych tym samym tematem, uczą się wiele od siebie nawzajem i nawiązują bliskie przyjacielskie więzi.

5. Uczniowskie prace badawcze z matematyki

Jacek Dymel, Kraków

W tym rozdziale chcemy omówić inny rodzaj pracy z uczniem zdolnym niż przygotowywanie go do olimpiad i konkursów. Do pewnego stopnia artykuł ten ma uniwersalny charakter, a rady w nim zawarte można zastosować także do innych niż matematyka dziedzin wiedzy szkolnej. Mowa jest o uczniowskich pracach badawczych. Przedstawimy ich cel, opiszemy sposób kierowania uczniem w czasie pracy, podamy przykłady tematów i źródła, skąd można je czerpać, a na koniec przedstawimy przykład pracy badawczej ucznia.

Praca badawcza jako alternatywna propozycja dla uczniów zdolnych

Mówiąc o pracy z uczniem zdolnym, na ogół mamy na myśli działania pod kątem olimpiady lub innych konkursów, a więc związane ze zdobywaniem wiedzy potrzebnej do uczenia się rozwiązywania określonych typów zadań. Uczymy wtedy również, jak uczeń powinien zapisać swoje rozwiązanie, aby zawierało wszystkie istotne elementy i było pełną prezentacją toku rozumowania. Przy okazji uczymy też, jak planować pracę w czasie pisania konkursu. I choć konkursy są niezbędne w procesie pracy z uczniem uzdolnionym matematycznie, nie kształcą wszystkich umiejętności niezbędnych w pracy matematyka – w przypadku rozwiązywania zadań konkursowych mamy bowiem do czynienia w pewnej mierze z myśleniem odtwórczym. Uczeń na wstępie otrzymuje informację, że problem na pewno jest rozwiązywalny i to metodami dostępnymi dla niego. To jest istotne ułatwienie, ale i ograniczenie aktywności ucznia. Często prowadzi do wykształcenia podejścia polegającego na zgromadzeniu odpowiednio dużego zestawu algorytmów i efektywnego posługiwania się nimi w rozwiązywaniu zadań. Uczeń próbuje wyławiać charakterystyczne metody czy twierdzenia, po zastosowaniu których wiele zadań da się rozwiązać niemal automatycznie. Z drugiej strony zasób wiedzy do zgromadzenia jest ogromny, co zniechęca do udziału w olimpiadzie wielu potencjalnie uzdolnionych uczniów. Takim osobom warto zaproponować inny sposób rozwijania swoich matematycznych uzdolnień, mianowicie pisanie prac badawczych.

Dobrą pracę badawczą może napisać właściwie każdy uczeń, który wykazuje zainteresowanie matematyką, także ten, który nie odnosi sukcesów olimpijskich. Podczas zawodów liczy się przede wszystkim pomysłowość, umiejętność szybkiego kojarzenia faktów, operatywna wiedza z wielu działów matematyki, tempo pracy, a także duże doświadczenie. Tymczasem przy pisaniu pracy badawczej znacznie mniej liczy się posiadany zasób wszechstronnych wiadomości (zawsze można go w razie potrzeby uzupełnić) oraz szybkość pracy, a bardziej – cierpliwość, dociekliwość, skrupulatność i upór w dążeniu do celu. Wielu uczniów, którzy nie odnoszą sukcesów olimpijskich, gdyż nie potrafią wpadać na właściwe pomysły w krótkim czasie zawodów, pisze efektowne prace badawcze.

Do napisania pracy z matematyki trzeba ucznia odpowiednio zachęcić, gdyż dla większości jest to zupełnie nowa forma, z którą po raz pierwszy spotykają się dopiero na studiach podczas pisania pracy licencjackiej lub magisterskiej. Na lekcjach, egzaminach i konkursach wymaga się od uczniów wyłącznie umiejętności rozwiązywania zadań, zatem nie mają na ogół okazji do samodzielnego badania i opisywania interesujących ich zagadnień, stawiania własnych hipotez oraz prób ich weryfikacji.

Jak organizować i wspomagać samodzielną pracę ucznia

Podczas pisania pracy badawczej przez ucznia ważne są następujące etapy:

- dobór tematu pracy,
- zebranie wiadomości, artykułów, książek i innych materiałów,
- postawienie hipotezy, która ma szansę weryfikacji,
- weryfikacja hipotezy,
- zapisanie wyników,
- przygotowanie prezentacji wyników.

Na każdym z tych etapów bardzo ważną rolę odgrywa opiekun pracy. Może nim być nauczyciel szkolny lub pracownik akademicki. Ważne, by miał doświadczenie w proponowaniu interesujących zagadnień, które będą prowadziły do ciekawych wyników. Mogłoby się bowiem zdarzyć, że chybiony problem po głębszej analizie okaże się nieciekawy, trywialny albo za trudny (lub wręcz niemożliwy do rozstrzygnięcia) i praca ucznia nie przyniesie rezultatów.

Dlatego niezwykle istotnym i trudnym momentem jest wybór tematu pracy. Ważne jest, aby był on zgodny z zainteresowaniami i predyspozycjami ucznia oraz dotyczył zagadnień, w których czuje się on dobrze. Zadanie badawcze nie może być zbyt obszerne, aby uczeń nie pogubił się w mnogości możliwych do analizy wątków. Z kolei zbyt wąski zakres tematyczny może spowodować zniechęcenie, gdy nie uda się uzyskać w miarę szybko istotnego postępu w badaniach.

Gdzie szukać tematów do pracy? Paradoksalnie bardzo dobrym źródłem pomysłów są zadania olimpijskie. Zmiana założeń, uszczegółowienie lub uogólnienie tezy może uwidocznić bardzo ciekawe problemy. Można też wyjść od powszechnie znanego twierdzenia i przenieść je na nową klasę obiektów lub w inny wymiar. Warto przeglądać czasopisma popularnonaukowe takie jak „Delta", „Magazyn Miłośników Matematyki" czy pozycje przeznaczone dla nauczycieli, jak na przykład „Matematyka" czy „Nauczyciele i Matematyka" lub „Matematyka Społeczeństwo Nauczanie". Artykuły w nich zawarte mogą być świetną inspiracją, a często zawierają wręcz propozycje gotowych problemów. Oczywiście na pomysł tematu można też wpaść, czytając książki popularnonaukowe lub przeglądając portale internetowe poświęcone matematyce.

Uczeń powinien rozpocząć swoją pracę od zapoznania się z materiałami (publikowanymi w prasie popularnej, fachowej, podręcznikach lub w internecie), w których są opisane główne pojęcia i metody umożliwiające badanie tematu. Ich analiza spowoduje zapoznanie się ze stanem wcześniejszej wiedzy na zadany temat i wyrobienie sobie intuicji, co ciekawego pozostało jeszcze do zbadania. Dzięki temu uczeń nie będzie wyważał otwartych drzwi, dowodząc fakty, które są powszechnie znane. Na tym etapie przydatna może być też konsultacja z pracownikiem wyższej uczelni.

Kolejnym etapem jest postawienie problemu. Musi być sformułowany precyzyjnie i dawać szanse rozwiązania. Do postawienia dobrej hipotezy przyda się nabyta wcześniej intuicja i „otrzaskanie" w temacie. Może się zdarzyć, że uczeń udowodni znany fakt, ale w inny sposób niż w źródłach, znajdzie dowód prostszy lub bardziej elementarny – to jest bardzo wartościowy wynik pracy badawczej. Nawet gdy uczniowi nie uda się uzyskać całkowitego rozwiązania, cenne i ciekawe mogą się okazać wyniki cząstkowe, konstrukcje przykładów lub kontrprzykładów do zakładanych tez (może się wszak zdarzyć, że postawiona przez ucznia hipoteza nie będzie prawdziwa), twierdzenia udowodnione przy wzmocnionych lub osłabionych założeniach itp.

Najdłuższym etapem jest oczywiście prowadzenie badań nad postawioną hipotezą. Wymaga to dużej cierpliwości, gdyż często mogą się pojawić fałszywe tropy albo konieczne może się okazać zapoznanie z dodatkowymi metodami i pojęciami. Tutaj szczególnie potrzebna jest pomoc nauczyciela, aby uczniem umiejętnie pokierował, podpowiedział dobrze rokujące kierunki badań, zawrócił ze ścieżki, która ewidentnie wiedzie na manowce, zachęcił do pogłębiania lub poszerzania badań i ocenił wartość uzyskanych wyników.

Jeśli uczeń wraz z opiekunem uznają otrzymane rezultaty za satysfakcjonujące, nadchodzi czas na zapisanie pracy. Powinno to być zrobione w sposób przejrzysty, zwięzły i w miarę prosty. We wstępie należy krótko opisać, o czym jest praca, co ją zainspirowało i jakie są jej główne wyniki. Następnie należy podać wiedzę teoretyczną niezbędną do zrozumienia problemu i jego rozwiązania, a potem zaprezentować opis przeprowadzonych badań i własne wyniki. Należy też podać pełną informację o źródłach, z których korzystał autor.

Co zrobić z gotową pracą?

Gdzie uczeń może pochwalić się swoimi badaniami? Najstarszym (w roku 2011 odbyła się XXXIII edycja) i najbardziej prestiżowym miejscem jest Konkurs Prac Uczniowskich z Matematyki organizowany przez miesięcznik popularnonaukowy „Delta". Wysłane tam prace muszą zawierać samodzielny wkład ucznia, prace czysto kompilacyjne nie są dopuszczane do finału.

Co roku w jednym z numerów „Delty" publikowany jest skrót pracy uczniowskiej nagrodzonej złotym medalem w roku poprzednim. Skróty innych nagrodzonych prac pojawiają się w tym samym numerze lub w kolejnych. Warto, aby przejrzeli je uczniowie oraz nauczyciele opiekujący się pracami uczniowskimi po raz pierwszy. Artykuły te są dostępne online pod adresem www.mimuw.edu.pl/delta, zakładka Numery archiwalne.

Oto kilka tematów prac nagrodzonych w konkursie „Delty":

- Waga szalkowa i uogólniony problem fałszywej monety
- O istnieniu funkcji ciągłej przyjmującej każdą wartość z góry zadaną ilość razy
- O rozrzedzeniach zbioru liczb naturalnych i szeregach P-harmonicznych
- Problem komiwojażera
- Wielowymiarowe muzeum i jego strażnicy
- O porządkowaniu zależności wektorów losowych związanym z pewną klasą funkcji
- O ukrytej podzielności wielomianów

Dwa kolejne konkursy prac uczniowskich to Ogólnopolski Sejmik Matematyków organizowany przez Pracownię Matematyki i Informatyki Pałacu Młodzieży w Katowicach (www.spinor.stolorz.pl/) oraz Konkurs Prac Matematycznych organizowany przez Krakowskie Młodzieżowe Towarzystwo Przyjaciół Nauk i Sztuk (www.towarzystwo.edu.pl). Na stronach tych konkursów można znaleźć proponowaną tematykę oraz przykładowe prace.

Przy wsparciu nauczyciela można się pokusić o publikację pracy uczniowskiej w jakimś czasopiśmie lub na portalu internetowym, a czasem udaje się znaleźć wydawcę, gotowego zainwestować w edycję w formie książkowej. Przykładem jest Wydawnictwo Szkolne „Omega" z Krakowa, które w 1999 roku wydało

„Koktajl matematyczny” będący zbiorem prac uczniowskich, a w 2008 roku „Kolorowe kwadraty” Marcina Pitery, opracowane na bazie jego dwóch prac nagrodzonych w Konkursie Prac Uczniowskich z Matematyki. Jednym z redaktorów „Koktajlu” i jego *spiritus movens* był prof. dr hab. Tomasz Szemberg z Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie. W słowie wstępnym napisał tak:

„Tworzenie prac uczniowskich widziałem jako alternatywę dla Olimpiady Matematycznej, udziałem w której trudno zainteresować cała klasę, a co za tym idzie, trudno rozwiązywać zadania olimpijskie na lekcjach. Nie mając do dyspozycji książki takiej jak ta, musiałem uczniów zachęcić (czasem zmusić), aby sięgnęli po książki napisane przez matematyków. Szybko okazało się, że czytanie, a tym bardziej pisanie matematyki jest zajęciem wymagającym skupienia i cierpliwości, ale leży to w zakresie każdego! Wystarczy przełamać pewną barierę psychologiczną. […] Po co pisać matematykę? Aby nauczyć się formułować i analizować problemy oraz przedstawiać w sposób czytelny ich rozwiązania. Rozwiązanie zadania matematycznego i jego zapis to dwie dość odległe sprawy. Ta umiejętność przyda się każdemu, nie tylko matematykowi. A ci, którzy zostaną matematykami, dowiedzą się w ten sposób, na czym będzie polegała ich przyszła praca. Szkoła średnia wytrwale bowiem kształtuje fałszywe przekonanie, że matematyka to rozwiązywanie trickowych zadań typu olimpijskiego”.

Zamiast zakończenia

Jakie są zalety pisania przez uczniów prac badawczych? Samodzielne pisanie pracy zmusza do określenia własnych zainteresowań oraz do podjęcia intelektualnych poszukiwań, czytania literatury, dogłębnego poznania jakiegoś tematu i opowiedzenia go własnymi słowami, kształtuje język matematyczny, uczy precyzji wypowiedzi oraz poprawnego zapisu, czyli pozwala nauczyć się pisać o matematyce. Ale przede wszystkim daje szansę na poznanie warsztatu pracy matematyka i jest znakomitym przygotowaniem do takiej pracy.

Na koniec chciałbym zaprezentować pracę mojej uczennicy Anny Dymek, pt. „Sangaku – japońskie inspiracje”. Zdobyła ona nagrodę I stopnia w krakowskim Konkursie Prac Matematycznych oraz srebrny medal w Konkursie Prac Uczniowskich z Matematyki miesięcznika „Delta” w roku 2011. Na potrzeby naszego poradnika Anna opisała też, jak powstawała jej praca. Myślę, że taka relacja „z pierwszej linii matematycznego frontu” okaże się pomocna dla wielu uczniów i nauczycieli.

Praca pt. „Sangaku – japońskie inspiracje” jest moją drugą pracą badawczą z matematyki. Punktem wyjścia było twierdzenie Caseya, o którym przeczytałam w książeczce Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej „Matematyka: poszukuję – odkrywam”, w artykule pani Joanny Zakrzewskiej. Zaciekawiona tym twierdzeniem postanowiłam sprawdzić, czy miało ono jak do tej pory zastosowanie w olimpiadach matematycznych, szukałam w internecie zadań z nim związanych. Ponieważ twierdzenie to jest pewnym uogólnieniem twierdzenia Ptoleme- usza (określenie to jest nawet zawarte w tytule artykułu), więc poszukiwania prowadziłam także w tym kierunku. Była to pierwsza ścieżka, którą podążyłam. Drugą okazał się szeroki, ale mało znany temat japońskich tabliczek wotywnych z zadaniami z geometrii euklidesowej, czyli właśnie Sangaku. Jak się okazało, twierdzenie Caseya zostało sformułowane właśnie w oparciu o jedno z tych zadań. Temat ten okazał się na tyle ciekawy, iż stał się drugą ścieżką moich badań.

W pracy badawczej staram się nie ograniczać do jednego tematu. Szukam uogólnień i skojarzeń, a następnie prowadzę badania w tych kierunkach, czasem bezowocne, jednak pozwalające dotrzeć do tak egzotycznego zagadnienia, jak Sangaku. Stąd moja praca nie ma jednolitego charakteru, stanowi raczej rodzaj eseju na temat tego, do czego ciekawego dotarłam w matematyce. Nagrody, które uzyskują moje prace, są dla mnie doskonałą motywacją do prowadzenia dalszych badań na inne tematy.

Anna Dymek

Sangaku - japońskie inspiracje

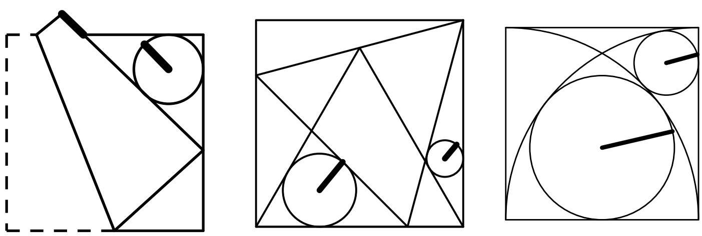
Anna Dymek

算額

Opiekun naukowy
dr Jacek Dymel

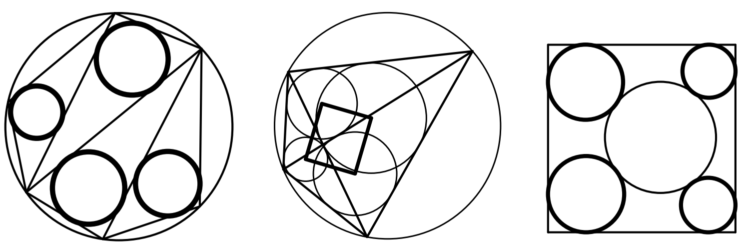
Wstęp

Sangaku lub San Gaku to japońskie zagadki matematyczne z geometrii euklidesowej malowane na drewnianych tabliczkach i umieszczane w sanktuariach Shinto oraz świątyniach buddyjskich jako ofiary dla bogów lub wyzwanie dla wiernych w okresie od XVII do XIX wieku. Wiele z nich zostało zniszczonych w późniejszym czasie, zaś co do niektórych do dziś nie wiadomo, co właściwie trzeba w nich wykazać. W poniższej pracy skupię się głównie na tych, z których mogą płynąć ciekawe zastosowania twierdzeń dotyczących okręgów.



Rys. 1

W powyższych przypadkach należy wyznaczyć stosunek długości pogrubionych odcinków.



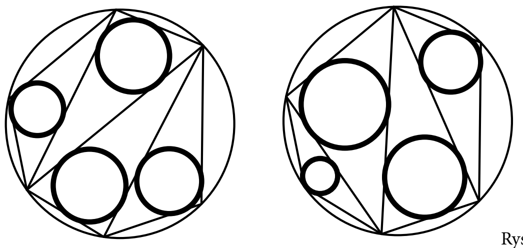
Rys. 2

Te z kolei przykłady Sangaku zawierają ciekawe konfiguracje okręgów, na których się skupię.

Kilka ciekawszych przykładów

Japońskie twierdzenie o wielokącie wpisanym w okrąg jest jednym z najpopularniejszych twierdzeń powstałych na podstawie sangaku. Jego treść brzmi:

Podzielmy dowolny wielokąt wypukły wpisany w okrąg na trójkąty za pomocą przekątnych, które się nie przecinają. Wpiszmy w każdy otrzymany trójkąt okrąg. Suma promieni otrzymanych okręgów jest stała i nie zależy od podziału wielokąta na trójkąty.

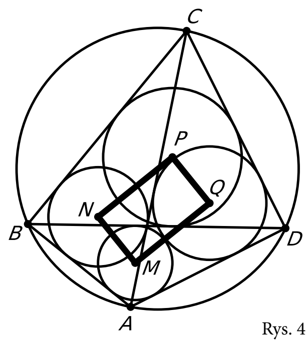


Rys. 3

Ideą dowodu zawartego w [1] jest twierdzenie Carnota, które pozwoli zapisać promienie tychże okręgów tylko w zależności od odległości wierzchołków wielokąta i promienia dużego okręgu.

Japońskie twierdzenie o czworokącie wpisanym w okrąg pojawiło się na Asian Pacific Mathematics Olympiad w 1996 r. i jego dowód opiera się wyłącznie na rachunku kątów.

Czworokąt $ABCD$ *jest wpisany w okrąg. Środki okręgów* M, N, P, Q *wpisanych odpowiednio w trójkąty* DAB, ABC, BCD, CDA *tworzą prostokąt.*



Rys. 4

Od sangaku do twierdzenia Caseya

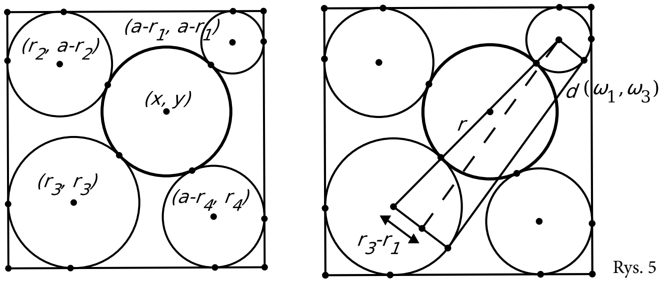
Pochodzące z 1874 roku z japońskiej prefektury Gunma sangaku przedstawia pięć okręgów wewnątrz kwadratu, przy czym jeden z nich nie ma wspólnych punktów z kwadratem, zaś pozostałe cztery są styczne do niego i do dwóch różnych boków kwadratu każdy. Na jej podstawie Johnson sformułował w 1929 roku następujące zadanie:

Wewnątrz kwadratu o boku a *znajduje się okrąg* ω*; figury te nie mają wspólnych punktów. Cztery okręgi* ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 *o różnych promieniach są styczne do okręgu* ω *oraz każdy z nich jest styczny do dwóch boków kwadratu. Wyznacz*

• *promienie okręgów ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 w zależności od boku kwadratu, położenia środka okręgu ω i jego promienia,*

• *długość boku kwadratu w zależności od promieni okręgów ω_1, ω_2, ω_3, ω_4,*

przy założeniu, że lewy dolny róg kwadratu leży w punkcie $(0,0)$, prawy górny w punkcie (a,a), natomiast środek okręgu ω w punkcie (x,y).



Rys. 5

Do rozwiązania pierwszego z zadań wystarczy twierdzenie Pitagorasa:

$$(a-r_4-x)^2+(y-r_4)^2=(r+r_4)^2,$$

$$(a-r_1-x)^2+(a-r_1-y)^2=(r+r_1)^2,$$

$$(x-r_3)^2+(y-r_3)^2=(r+r_3)^2,$$

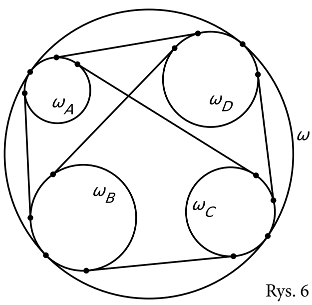
$$(x-r_2)^2+(a-r_2-y)^2=(r+r_2)^2.$$

Rozwiązanie powyższego układu równań kwadratowych pozwala wyznaczyć wszystkie cztery promienie, co należało zrobić.

Okazuje się, że drugie z tych zadań rozwiązać można przy użyciu twierdzenia Caseya.

Twierdzenie Caseya. *Jeśli okręgi ω_A, ω_B, ω_C, ω_D są styczne do okręgu ω w punktach A, B, C i D (wszystkie wewnętrznie lub wszystkie zewnętrznie) oraz czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg ω jest wypukły, to spełniona jest równość:*

$$d(\omega_A,\omega_C)\cdot d(\omega_B,\omega_D)=d(\omega_A,\omega_B)\cdot d(\omega_C,\omega_D)+d(\omega_B,\omega_C)\cdot d(\omega_A,\omega_D).$$



Rys. 6

W szczególności dowolna liczba okręgów stycznych do ω może być zdegenerowana do punktu, który traktujemy jako styczny do okręgu ω w tym właśnie punkcie.

D o w ó d. Dowód tego twierdzenia zawarty w [2] opiera się na wykazaniu (za pomocą twierdzeń sinusów i kosinusów), że dla dowolnych $X, Y \in \{A,B,C,D\}$ będących punktami styczności okręgów ω_A, ω_B, ω_C lub ω_D o promieniach odpowiednio r_A, r_B, r_C, r_D do okręgu ω o promieniu R zachodzi

$$d(\omega_X, \omega_Y) = \frac{XY}{R}\sqrt{(R - r_X)(R - r_Y)},$$

a następnie zapisaniu z twierdzenia Ptolemeusza dla czworokąta $ABCD$ równości $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$, która po pomnożeniu stronami przez $\frac{1}{R^2}\sqrt{(R - r_1)(R - r_2)(R - r_3)(R - r_4)}$ da nam tezę twierdzenia Caseya.

Mogę teraz powrócić do rozwiązania sangaku z pięcioma okręgami.

Korzystając z twierdzenia Caseya, wyznaczmy odległości styczne pomiędzy okręgami ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. Kilka z nich jest łatwo widocznych:

$$d(\omega_1, \omega_2) = a - r_1 - r_2,$$

$$d(\omega_3, \omega_4) = a - r_3 - r_4,$$
$$d(\omega_1, \omega_4) = a - r_1 - r_4,$$
$$d(\omega_2, \omega_3) = a - r_2 - r_3,$$

pozostałe dwie zaś możemy łatwo wyznaczyć, korzystając dwukrotnie z twierdzenia Pitagorasa:

$$O_1{O_3}^2 = 2 \cdot (a - r_1 - r_3)^2 \quad \text{i} \quad O_2{O_4}^2 = 2(a - r_2 - r_4)^2,$$

$$d(\omega_1, \omega_3)^2 = 2(a - r_1 - r_3)^2 - (r_3 - r_1)^2 \quad \text{i} \quad d(\omega_2, \omega_4)^2 = 2(a - r_2 - r_4)^2 - (r_2 - r_4)^2,$$

czyli

$$d(\omega_1, \omega_3) = \sqrt{2 \cdot (a - r_1 - r_3)^2 - (r_3 - r_1)^2}$$

oraz

$$d(\omega_2, \omega_4) = \sqrt{2 \cdot (a - r_2 - r_4)^2 - (r_2 - r_4)^2}.$$

Ponieważ okręgi ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 są styczne zewnętrznie do okręgu ω, więc z twierdzenia Caseya

$$(a - r_1 - r_2)(a - r_3 - r_4) + (a - r_2 - r_3)(a - r_1 - r_4) =$$
$$= \sqrt{2 \cdot (a - r_1 - r_3)^2 - (r_3 - r_1)^2} \cdot \sqrt{2 \cdot (a - r_2 - r_4)^2 - (r_2 - r_4)^2},$$

co pozwala wyprowadzić wzór

$$a = \frac{2(r_1 r_3 - r_2 r_4) + \sqrt{2(r_1 - r_2)(r_1 - r_4)(r_3 - r_2)(r_3 - r_4)}}{r_1 - r_2 + r_3 - r_4},$$

czyli otrzymaliśmy zależność pomiędzy bokiem kwadratu a promieniami okręgów ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, jak należało.

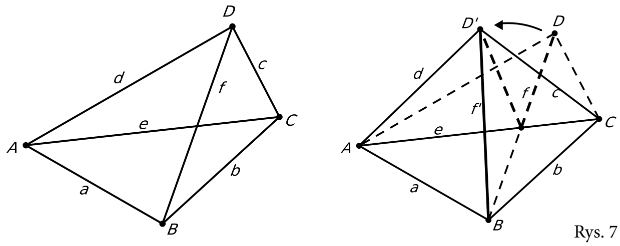
Inna droga od twierdzenia Caseya

W dowodzie twierdzenia Caseya zostało użyte twierdzenie Ptolemeusza. Łatwo zauważyć, że jest ono w istocie szczególnym przypadkiem twierdzenia Caseya, gdy wszystkie cztery okręgi są zredukowane do punktów. Ponieważ jednak opieramy na nim dowód, przydatne może być przytoczenie treści twierdzenia Ptolemeusza jak również nazwanych jego nazwiskiem nierówności.

Twierdzenie Ptolemeusza. *W dowolnym czworokącie wypukłym $ABCD$ równość $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg.*

Nierówność Ptolemeusza. *W dowolnym czworokącie $ABCD$ zachodzi nierówność $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD$.*

Mając daną tę nierówność, weźmy punkt D „do ręki" i zegnijmy czworokąt $ABCD$ wzdłuż przekątnej AC. Ponieważ zagięliśmy przekątną f, więc z nierówności trójkąta $D'B = f' < f$.



Rys. 7

Z tego płynie prosty wniosek, że

$$a \cdot c + b \cdot d \geqslant e \cdot f > e \cdot f',$$

co przenosi nierówność Ptolemeusza w trzeci wymiar.

Nierówność Ptolemeusza w przestrzeni. *W dowolnym czworościanie suma iloczynów długości dwóch dowolnych krawędzi podstawy przez długości krawędzi leżących naprzeciw nich jest większa niż iloczyn długości trzeciej krawędzi podstawy przez długość krawędzi leżącej naprzeciwko niej.*

Skoro twierdzenie można uogólnić na okręgi, to może nierówność także?

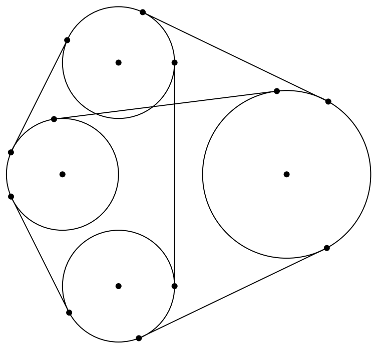
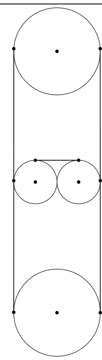
Twierdzenie Ptolemeusza jest szczególnym przypadkiem Twierdzenia Caseya, co pozwala postawić hipotezę, iż nierówność Ptolemeusza może także mieć swój odpowiednik dla okręgów. Taka „hipotetyczna nierówność Caseya" mogłaby wyglądać tak:

$$d(\omega_A, \omega_C) \cdot d(\omega_B, \omega_D) \leqslant d(\omega_A, \omega_B) \cdot d(\omega_C, \omega_D) + d(\omega_B, \omega_C) \cdot d(\omega_A, \omega_D)$$

lub tak:

$$d(\omega_A, \omega_C) \cdot d(\omega_B, \omega_D) \geqslant d(\omega_A, \omega_B) \cdot d(\omega_C, \omega_D) + d(\omega_B, \omega_C) \cdot d(\omega_A, \omega_D),$$

Dla obu takich nierówności znalazłam w trakcie moich badać kontrprzykłady.

kontrprzykład dla nierówności $L \leqslant P$	kontrprzykład dla nierówności $L \geqslant P$
	
Trzy okręgi o promieniu 2, jeden o promieniu 3; środki okręgów tworzą deltoid o obu przekątnych długości 8, z których jedna jest podzielona w $\frac{1}{4}$; okrąg o promieniu 3 ma środek w najbardziej oddalonym wierzchołku deltoidu.	Dwa okręgi o promieniu 1, styczne nawzajem; dwa okręgi o promieniu 2, w odległości 6 od punktu styczności małych okręgów; linie łączące środki okręgów o tym samym promieniu są prostopadłe.

Powyższe przykłady przeczą istnieniu uniwersalnej nierówności Caseya. W trakcie pracy nie udało mi się także określić bardziej specyficznych warunków, dla których nierówność taka miałaby zachodzić zawsze w jedną stronę.

Podczas badań szukałam też sposobów na przeniesienie twierdzenia Caseya (lub pewnej nierówności) w przestrzeń, jednakże nie udało mi się dojść do żadnych efektów, które byłyby analogiczne do tych na płaszczyźnie. Główną trudnością są tu odmienne własności stycznych niewspółpłaszczyznowych w stosunku do współpłaszczyznowych, które mogą wymagać użycia bardziej skomplikowanych narzędzi matematycznych. Niemniej temat ten wciąż pozostaje polem do dalszych badań naukowych.

Literatura

[1] Lev Kurlyandchik, *Kącik olimpijski,* część I (Aksjomat, 2012) *Geometria.*

[2] Joanna Zakrzewska, *O pewnym uogólnieniu twierdzenia Ptolemeusza,* w: *Matematyka: poszukuję – odkrywam.* (WS Omega, 2010)

[3] Archiwum Olimpiady Matematycznej, *http://archom.ptm.org.pl*

[4] Nierówności (mniej lub bardziej) geometryczne, *http://lo-curie.pl/Nierownosci.pptx*

6. Biblioteczka olimpijczyka

Jacek Dymel, Kraków

W pracy z uczniem uzdolnionym matematycznie bardzo ważny jest dobór materiałów dydaktycznych odpowiednich do poziomu rozwoju ucznia. Książki, czasopisma i portale tematyczne są w tym zakresie nieocenioną pomocą zarówno dla ucznia, jak i nauczyciela. W artykule przedstawiam materiały, z których sam często korzystam w pracy z uczniami uzdolnionymi matematycznie (z podziałem na poszczególne etapy edukacyjne). Część z nich powinna stanowić pozycję obowiązkową w biblioteczce każdego olimpijczyka i jego nauczyciela.

Nauczyciel olimpijczyka powinien być moderatorem podsuwającym uczniowi lektury odpowiednie do jego wieku, wiedzy i zainteresowań. Samodzielne czytanie przez ucznia książek o tematyce olimpijskiej jest bardzo ważne dla jego rozwoju.

Lektury obowiązkowe

Książki dla olimpijczyków można podzielić na trzy kategorie:
- pozycje prezentujące konkretne metody rozwiązywania zadań,
- zbiory zadań ułożonych tematycznie,
- zbiory zawierające zestawy zadań z różnych konkursów i olimpiad polskich i zagranicznych.

W większości zbiorów zadania o podwyższonym stopniu trudności podawane są z pełnymi rozwiązaniami.

Uczeń rozpoczynający przygodę z olimpiadą w pierwszej kolejności powinien się zapoznać z językiem zadań olimpijskich i podstawowymi metodami ich rozwiązywania. Dla ucznia ambitnego, ale nieprzygotowanego, hermetyczność zadań olimpijskich bywa dużym zaskoczeniem, mogącym powodować zniechęcenie. Pojęcia występujące w zadaniach olimpijskich nie wykraczają poza zagadnienia z programów szkolnych, specyficzny i odmienny od szkolnego jest jednak język, w jakim są formułowane treści zadań, inne są też metody i techniki ich rozwiązywania, które na ogół nie są omawiane w szkole.

Dlatego pierwszym krokiem jest zapoznanie się z materiałami, w których są opisane konkretne metody rozwiązywania zadań olimpijskich. Drugim krokiem może być systematyczna praca z zadaniami ułożonymi tematycznie (np. zadania z teorii liczb, kombinatoryki, planimetrii), ale bez przyporządkowanej im metody postępowania. Końcową fazą jest korzystanie ze zbiorów zadań z różnych konkursów i olimpiad. Gdy uczeń ma wyrobiony pewien aparat matematyczny i potrafi w rozwiązaniu zadania dostrzec znane motywy, rozwiązanie już nie wydaje mu się sztuczne, a pomysły w nim zawarte – niezrozumiałe i „wyjęte z kapelusza".

Powyżej przedstawiłem dosyć typową drogę pracy olimpijczyka z literaturą fachową. Trzeba jednak pamiętać, że są uczniowie o szczególnie wybitnych uzdolnieniach, którzy mogą podążać odmienną ścieżką. Bardzo dużo zależy tu od wyczucia nauczyciela pracującego z uczniem.

A jak pracować z konkretną książką? Warto, by uczeń przeczytał metodę opisaną przez autora i spróbował rozwiązywać przypisane do niej zadania. Początkowo może tylko czytać i dokładnie analizować rozwiązania, a po głębszym zrozumieniu metody i nabraniu doświadczenia może próbować samodzielnie rozwiązywać zadania skojarzone z poznaną metodą. Oczywiście jeśli uczeń wpadnie na pomysł rozwiązania zadania samodzielnie, to sposób ten zapadnie mu na dłużej w pamięć. Nie należy jednak zmuszać ucznia do w pełni samodzielnego rozwiązania zadania, jeżeli zbyt długo mu się to nie udaje. Rodzi to frustrację i zniechęcenie. Lepiej aby uczeń przeczytał i przeanalizował w tym czasie rozwiązanie autorskie. Bardzo często rozwiązania zadań olimpijskich są oparte na specyficznych pomysłach i wymyślanie ich za każdym razem może być trudne. Dlatego warto czytać rozwiązania, aby zapamiętywać takie olimpijskie tricki.

W poniższym zestawieniu materiały zostały podzielone według poziomu edukacyjnego uczniów, do których są adresowane. Podział ten jest umowny i zależy od faktycznej wiedzy i umiejętności ucznia. Materiały wymienione w części dla szkół ponadgimnazjalnych są trudniejsze, a zawarta w nich wiedza nie przyda się bezpośrednio do zadań z OMG.

Materiały dla szkół podstawowych

Na poziomie szkół podstawowych nie ma olimpiad ani konkursów o podobnym stopniu trudności, wymagających prowadzenia dedukcyjnych rozumowań. Można jednak polecić kilka pozycji, które rozwijają takie umiejętności i mogą wprowadzić ucznia szkoły podstawowej w świat olimpiad.

- Z. Bobiński, P. Nodzyński, M. Uscki, *Koło matematyczne w szkole podstawowej*, Aksjomat, Toruń, 2008.
- H. Pawłowski, *Na olimpijskim szlaku*, Tutor, Toruń, 2006.
- H. Pawłowski, W. Tomalczyk, Z. Głowacki, *Odlotowa matematyka*, Tutor, Toruń, 2010.
- H. Pawłowski, *Olimpiady i konkursy matematyczne dla uczniów szkół podstawowych i gimnazjów*, Tutor, Toruń, 2006.
- J. Bednarczuk, J. Bednarczuk, *Matematyczne gwiazdki: zbiór zadań dla uczniów zainteresowanych matematyką klas 4–6 szkoły podstawowej*, Nowa Era, Warszawa, 2007.
- Z. Bobiński, P. Jarek, A. Świątek, M. Uscki, *Miniatury matematyczne 3. O liczbach i równaniach*, Aksjomat, Toruń, 1998.
- Z. Bobiński, P. Nodzyński, M. Uscki, *Miniatury matematyczne 9. Uczmy się myśleć nieszablonowo*, Aksjomat, Toruń, 2003.
- P. Jarek, L. Kourliandtchik, M. Uscki, *Miniatury matematyczne 5*, Aksjomat, Toruń, 2001.
- Z. Bobiński, P. Jarek, P. Jędrzejewicz, M. Mentzen, P. Nodzyński, A. Sendlewski, A. Świątek, M. Uscki, *Miniatury matematyczne 33. Zadania logiczne*, Aksjomat, Toruń, 2011.
- Z. Bobiński, P. Nodzyński, A. Świątek, *Miniatury matematyczne 24. Matematyka wokół zegara*, Aksjomat, Toruń, 2008
- Z. Bobiński, P. Nodzyński, A. Świątek, *Miniatury matematyczne 27. Prędkość, droga, czas*, Aksjomat, Toruń, 2009

Materiały dla gimnazjalistów

Cennym źródłem wiedzy i inspiracją do pracy z uczniami zdolnymi są treści zawarte w sprawozdaniach z olimpiad matematycznych gimnazjalistów.

- *I Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów*, Omega, Kraków 2008 – sprawozdanie z zawodów, treści i rozwiązania zadań oraz dwa dodatki tematyczne: *Konkurencje* (autorzy: J. Dymel i M. Niedźwiedź) oraz *Zasada szufladkowa Dirichleta* (autorka: J. Jaszuńska);
- *II Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów*, Omega, Kraków 2009 – sprawozdanie z zawodów, treści i rozwiązania zadań oraz dwa dodatki tematyczne: *Nierówność Schwarza* (autor: T. Szymczyk), *Twierdzenie Carnota* (autor: W. Guzicki).
- *III Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów*, Omega, Kraków 2011 – sprawozdanie z zawodów, treści i rozwiązania zadań oraz dwa dodatki tematyczne: *Pole* (autorzy: W. Pompe, U. Swianiewicz), *Wartość bezwzględna* (autorzy: P. Kwiatkowski, T. Szymczyk) – olimpiada realizowana w ramach projektu MEN/ORE „Opracowanie i wdrożenie kompleksowego systemu pracy z uczniem zdolnym".
- *IV Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów*, Omega, Kraków, 2012 – sprawozdanie z zawodów, treści i rozwiązania zadań oraz dodatek tematyczny *Długości odcinków w trójkącie* (autorzy: Wojciech Guzicki, Waldemar Pompe) – olimpiada realizowana w ramach projektu MEN/ORE „Opracowanie i wdrożenie kompleksowego systemu pracy z uczniem zdolnym".

Ponadto wydawana jest gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów „Kwadrat", w której zamieszczane są m.in. materiały pomocne w przygotowaniu do zawodów, a także ciekawostki dotyczące Olimpiady. Gazetka dostępna jestna stronie www.omg.edu.pl

Książki prezentujące konkretne metody rozwiązywania zadań

Bardzo dobrą serią wydawniczą są *Miniatury matematyczne* publikowane przez Wydawnictwo Aksjomat z Torunia, związane z Międzynarodowym Konkursem *Kangur Matematyczny*. W każdej książce tej serii znajduje się kilka artykułów omawiających interesujące zagadnienie olimpijskie lub metodę olimpijską z przykładami zastosowań w zadaniach. Każda książka jest pracą zbiorową.

- *MM 4*: *Grafy. Parzystość i nieparzystość. Przekształcenia geometryczne w zadaniach konstrukcyjnych. Wielościany foremne i ich kuzyni. Liczby pierwsze o szczególnym rozmieszczeniu cyfr*, Toruń 2000.
- *MM 5*: *Wartość bezwzględna. Wartość bezwzględna poza stronicami podręcznika matematyki. Pewne problemy teorioliczbowe a wykorzystanie reszt. Niekonwencjonalne konstrukcje i wielokąty kratowe*, Toruń 2001.
- *MM 16*: *Dowody matematyczne. Działania na potęgach*, Toruń 2005.
- *MM 22*: *Twierdzenie o wypełnianiu prostokątów. Problem czterech barw. Średnie liczbowe i nierówności*, Toruń 2007.
- *MM 25*: *Kąty w kole. O podziale odcinka na równe części. Dłuuugie liczby*, Toruń 2008.
- *MM 28*: *Fraktale w Cinderelli. Ile jest liczb? Słów kilka o wielokątach foremnych*, Toruń 2009.
- *MM 31*: *Wielokąty z symetriami. Zliczanie rekurencyjne. Wokół twierdzenia Pitagorasa*, Toruń 2010.
- *MM 34*: *Ułamki łańcuchowe. O sposobie sortowania. Sangaku, czyli coś z Japonii*, Toruń 2011.

Ponadto warto polecić następujące książki:

- D. Musztari, *Przygotowanie do olimpiad matematycznych*, Adam, Warszawa, 2005 – pozycja wykracza poza poziom trudności OMG, ale część książki jest zrozumiała dla gimnazjalistów.
- L. Kourliandtchik, *Impresje matematyczne. Tom 1*, Aksjomat, Toruń 2005.

- B. Bogdańska, A. Neugebauer, *Matematyka olimpijska. Geometria,* Szczecin 2010.
- S.I. Zetel, *Geometria trójkąta*, PZWS, Warszawa 1964 – pozycja niedostępna w księgarniach.
- J. Zydler, *Geometria*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997 – pozycja niedostępna w księgarniach.
- A. Ehrenfeucht, *Ciekawy czworościan*, PZWS, Warszawa 1966 – pozycja niedostępna w księgarniach.

Zbiory zadań ułożonych tematycznie

- H. Pawłowski, *Na olimpijskim szlaku. Zadania dla kółek matematycznych w szkołach podstawowych i gimnazjach*, Tutor, Toruń 2006.
- H. Pawłowski, *Olimpiady i konkursy matematyczne dla uczniów szkół podstawowych i gimnazjów,* Tutor, Toruń 2006.
- M. Niedźwiedź, *Zbiór zadań z kółka matematycznego*, Omega, Kraków 2010.
- P. Cholewik, M. Dębska, Ł. Drwięga, B. Gardaś, T. Szymczyk, M. Węgrzyn, *Przed konkursem matematycznym. Część I*, Omega, Kraków 2010.
- P. Jędrzejewicz, *Bukiety matematyczne dla gimnazjum. Zadania przygotowujące do konkursów*, GWO, Gdańsk 2009.
- Z. Bobiński, P. Nodzyński, M. Uscki, *Koło matematyczne w gimnazjum*, Aksjomat, Toruń 2010.
- W. Bednarek, *Konkurs matematyczny w gimnazjum. Przygotuj się sam!*, Nowik, Opole 2009.

Zbiory zadań z konkursów i olimpiad

- H. Pawłowski, W. Tomalczyk, *Zadania z matematyki dla olimpijczyków – gimnazjalistów i licealistów*, Tutor, Toruń 2010.
- Z. Bobiński, P. Nodzyński, M. Uscki, *Liga zadaniowa. Zbiór zadań dla uczniów zainteresowanych matematyką*, Aksjomat, Toruń 2004.
- Z. Bobiński, P. Nodzyński, M. Uscki, *Liga Zadaniowa XX lat. Zadania wybrane,* Aksjomat, Toruń 2007.
- J. Kalinowski *Zbiór zadań z czeskich i słowackich Olimpiad Matematycznych 1951–2004. Dla uczniów klas I i II szkół ponadgimnazjalnych*, Adam, Warszawa 2005.

Materiały dla licealistów

Olimpiada Matematyczna jest w Polsce organizowana od 1949 roku. Od początku jej istnienia wydawane były *Sprawozdania* z poszczególnych edycji, jednak nie były dostępne w sprzedaży, a jedynie rozdawane uczestnikom OM oraz wysyłane do szkół. Można je znaleźć w szkolnych bibliotekach. Co kilka lat były natomiast wydawane zbiory z zadaniami z pięciu kolejnych edycji olimpiady. Niestety obecnie są niedostępne w sprzedaży. Z zadaniami z olimpiad matematycznych można się zapoznać na portalach internetowych: www.om.edu.pl i www.archom.ptm.org.pl.

- S. Straszewicz, *Zadania z olimpiad matematycznych, tom 1*, WSiP, Warszawa 1960.
- S. Straszewicz, *Zadania z olimpiad matematycznych, tom 2*, WSiP, Warszawa 1961.
- S. Straszewicz, *Zadania z olimpiad matematycznych, tom 3*, WSiP, Warszawa 1966.
- S. Straszewicz, *Zadania z olimpiad matematycznych, tom 4*, WSiP, Warszawa 1972.
- J. Browkin, *Zadania z olimpiad matematycznych, tom 5*, WSiP, Warszawa 1980.
- J. Browkin, *Zbiór zadań z olimpiad matematycznych, tom 6*, WSiP, Warszawa 1983.
- J. Browkin, J. Rempała, S. Straszewicz, *25 lat Olimpiady Matematycznej*, WSiP, Warszawa 1975.
- M. Bryński, *Olimpiady Matematyczne, tom 7*, WSiP, Warszawa 1995.
- M. Kuczma, *Zadania z olimpiad matematycznych, tom 8,*Warszawa 2000.

Książki prezentujące konkretne metody rozwiązywania zadań

- H. Pawłowski, *Kółko matematyczne dla olimpijczyków,* Turpress, Toruń 1994 – jedna z najlepszych pozycji na polskim rynku, niedostępna w księgarniach.
- D. Musztari, *Przygotowanie do olimpiad matematycznych*, Adam, Warszawa 2005.
- B. Bogdańska, Adam Neugebauer, *Matematyka olimpijska. Geometria*, Szczecin 2010.
- A. Neugebauer, *Matematyka olimpijska. Algebra i teoria liczb*, Szczecin 2010.
- B. Bogdańska, A. Neugebauer, *Matematyka olimpijska. Kombinatoryka,* Szczecin, 2010.
- S.I. Zetel*, Geometria trójkąta*, PZWS, Warszawa 1964 – pozycja niedostępna w księgarniach.
- W. Sierpiński, *O rozwiązywaniu równań w liczbach całkowitych*, PWN, Warszawa 2009.
- A. Mąkowski, T. Iwaniec, *Zasada szufladkowa Dirichleta. Geometria okręgów i sfer*, WSiP, Warszawa 1980 – pozycja niedostępna w księgarniach.
- M. Pitera, *Kolorowe kwadraty*, Omega, Kraków 2008.
- J. Dymel, J. Jaszuńska, A. Osękowski, H. Pawłowski, W. Pompe, T. Szymczyk, J. Zakrzewska, *Matematyka. Poszukuję – odkrywam*, Omega, Kraków 2010.
- L. Kourliandtchik, *Wędrówki po krainie nierówności,* Aksjomat, Toruń 2000.
- L. Kourliandtchik, *Powrót do krainy nierówności,* Aksjomat, Toruń 2001.
- L. Kourliandtchik, *Impresje matematyczne. Tom 1*, Aksjomat, Toruń 2007.
- L. Kourliandtchik, *Złote rybki w oceanie matematyki*, Tutor, Toruń 2005.
- L. Kourliandtchik, *Impresje liczbowe*, Tutor, Toruń 2001.
- L. Kourliandtchik, *Etiudy matematyczne,* Tutor, Toruń 2000.
- L. Kourliandtchik, *Najkrótsze sieci*, Aksjomat, Toruń 2007.
- L. Dubikajtis, *Wiadomości z geometrii rzutowej*, PZWS, Warszawa 1972 – pozycja niedostępna w księgarniach.
- E. Otto, *Krzywe stożkowe,* WSiP, Warszawa 1976 – pozycja niedostępna w księgarniach.
- N.J. Wilenkin, *Kombinatoryka*, PWN, Warszawa 1972 – pozycja niedostępna w księgarniach.
- J. Flachsmeyer, *Kombinatoryka*, PWN, Warszawa 1974 – pozycja niedostępna w księgarniach.
- A. Ehrenfeucht, *Ciekawy czworościan*, PZWS, Warszawa 1966 – pozycja niedostępna w księgarniach.
- H. Pawłowski, *Zbiór zadań dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum. Klasy 1, 2, 3*, Operon, Gdynia 2001 – bogaty zbiór zadań olimpijskich – pozycja niedostępna w księgarniach.

W latach 60., 70. i 80. XX wieku była wydawana znakomita seria *Biblioteczka Matematyczna*. Książki te są dostępne w bibliotekach. Oto pozycje serii szczególnie przydatne w kształceniu olimpijczyków:

- M. Łuczyński, Z. Opial, *O konstrukcjach trójkątów*, PZWS, Warszawa 1964.
- E. Piegat, *Wektory i geometria*, PZWS, Warszawa 1964.
- J. Bednarczuk, *Urok przekształceń afinicznych*, WSiP, Warszawa 1978.
- W. Sierpiński, *250 zadań z elementarnej teorii liczb*, WSiP, Warszawa 1987.
- W. Sierpiński, *Wstęp do teorii liczb*, WSiP, Warszawa 1987.
- M. Kuczma, *O szeregach liczbowych*, WSiP, Warszawa 1987.

Polecam również wymienione w części dla gimnazjalistów *Miniatury matematyczne* (nr 4 i 5), wydane przez Aksjomat z Torunia, a ponadto z tej samej serii:

- *MM 8*: *Elementarne sposoby w kombinatoryce*, Toruń 2002.
- *MM 11*: *Wielokąty foremne i półforemne. O liczbach niewymiernych. O cyklicznych układach równań*, Toruń 2003.

- *MM 14*: *Funkcja kwadratowa – wybrane zagadnienia. Krótka prezentacja długiej historii liczby π. Matematyka jako jedna całość*, Toruń 2004.
- *MM 17*: *Liczby sprzężone. Zabawy z cieniem. Środek ciężkości*, Toruń 2005.
- *MM 20*: *O współrzędnych biegunowych. Niewykonalne konstrukcje*, Toruń 2006.
- *MM 23*: *Część całkowita liczby. O pewnych równaniach kwadratowych. Moment bezwładności*, Toruń 2007.
- *MM 26*: *Sofizmaty matematyczne. O podziale odcinka na równe części. Jak znaleźć punkty w nieskończoności*, Toruń 2008.
- *MM 29*: *Fraktale w Cinderelli. Przystawanie trójkątów. Iluzje matematyczne... i nie tylko*, Toruń 2009.
- *MM 35*: *Ciągi arytmetyczne i geometryczne. Styczne do krzywych stożkowych. Analogie między trójkątem i czworościanem*, Toruń 2011.

I jeszcze porcja podręczników akademickich, w których znajdują się przystępnie napisane rozdziały z metodami charakterystycznymi dla zadań olimpijskich.

- Z. Palka, A. Ruciński, *Wykłady z kombinatoryki*, WNT, Warszawa 2009.
- V. Bryant, *Aspekty kombinatoryki*, WNT, Warszawa 1997.
- R. Wilson, *Wprowadzenie do teorii grafów*, PWN, Warszawa 2008.
- K. Ross, Ch. Wright, *Matematyka dyskretna*, PWN, Warszawa 2011.
- R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, PWN, Warszawa 2011.
- J. Banaś, S. Wędrychowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, WNT, Warszawa 2004 – szczególnie przydatne są rozdziały *Ciągi liczbowe* oraz *Równania funkcyjne.*
- W. Marzantowicz, P. Zarzycki, *Elementarna teoria liczb,* PWN, Warszawa 2006.
- H.S. Coxeter, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej,* PWN, Warszawa 1967 – pozycja niedostępna w księgarniach.
- D.S. Mitrinović, *Elementarne nierówności*, PWN, Warszawa 1972 – pozycja niedostępna w księgarniach.

Zbiory zadań ułożonych tematycznie

- H. Pawłowski, *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata. Trygonometria i geometria*, Tutor, Toruń 2003.
- H. Pawłowski, *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata. Planimetria i stereometria*, Tutor, Toruń 2004.
- H. Pawłowski: *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata. Teoria liczb, algebra i elementy analizy matematycznej*, Tutor, Toruń 2005.
- L. Kourliandtchik, *Impresje matematyczne. Tom 2*, Aksjomat, Toruń 2007.
- L. Kourliandtchik, *Kącik olimpijski. Geometria,* Aksjomat, Toruń 2006.
- L. Kourliandtchik, *Kącik olimpijski. Algebra,* Aksjomat, Toruń 2007.
- L. Kourliandtchik, *Kącik olimpijski. Nierówności,* Aksjomat, Toruń 2007.
- L. Kourliandtchik, *Matematyka elementarna w zadaniach (cz. 1 i 2),* Aksjomat, Toruń 2005.
- W. Bednarek, *Jeśli lubisz matematykę (cz. 1, 2, 3)*, Nowik, Opole 2009, 2010, 2011.
- P. Jędrzejewicz, *Bukiety matematyczne w liceum i technikum*, GWO, Gdańsk 2009.

Zbiory zadań z konkursów i olimpiad

- J. Kalinowski, *Zbiór zadań z czeskich i słowackich Olimpiad Matematycznych 1951–2004. Dla uczniów klas I i II szkół ponadgimnazjalnych*, Adam, Warszawa 2005.
- J. Kalinowski *Zbiór zadań z czeskich i słowackich Olimpiad Matematycznych 1951–2001. Dla uczniów starszych klas szkół ponadgimnazjalnych*, Adam, Warszawa 2002.

- L. Kourliandtchik, *Kącik olimpijski. Sałatka matematyczna,* Aksjomat, Toruń 2007.
- H. Pawłowski, Wojciech Tomalczyk, *Zadania z matematyki dla olimpijczyków – gimnazjalistów i licealistów*, Tutor, Toruń 2010.
- H. Steinhaus, *100 zadań*, DIP, Warszawa 1993.
- H. Steinhaus, *Jeszcze 105 zadań*, GiS, Wrocław 2000.

Literatura obcojęzyczna

Bogata literatura dla olimpijczyków dostępna jest po rosyjsku i angielsku. Wersje elektroniczne książek w języku rosyjskim można znaleźć na portalach www.mccme.ru oraz www.math.ru. Poniżej podajemy trudniej dostępne, ale warte polecenia pozycje anglojęzyczne (egzemplarze nowe lub używane można zamówić po okazyjnych cenach na www.amazon.uk).

- A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer Verlag, New York 1998 – przegląd najważniejszych metod olimpijskich.
- D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović, *The IMO Compendium. A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads1959–2009*, Springer, 2010.
- T. Andreescu, D. Andrica, *Complex Numbers from A to Z*, Birkhauser, Boston 2006.
- T. Andreescu, D. Andrica, Z. Feng, *104 Number Theory Problems from the Training of the USA IMO Team*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin 2007.
- T. Andreescu, Z. Feng, *103 Trigonometry Problems from the Training of the USA IMO Team*, Birkhauser, Boston 2005.
- T. Andreescu, S. Savchev, *Mathematical Miniatures*, The Mathematical Association of America, 2003.
- E.J. Barbeau, *Polynomials*, Springer-Verlag, New York 1989.
- T. Tao, *Solving Mathematical Problems. A Personal Perspective*, University of California, Los Angeles 2005 – książka napisana przez wielokrotnego medalistę Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej, późniejszego laureata Medalu Fieldsa, opisująca strategie rozwiązywania zadań olimpijskich.

Czasopisma

- „Delta”– miesięcznik popularnonaukowy wychodzący od 1974 roku z artykułami o metodach olimpijskich, kącikiem zadaniowym oraz świetną ligą zadaniową, artykuły archiwalne można pobrać ze stron www.mimuw.edu.pl/delta i www.deltami.edu.pl.
- „Magazyn Miłośników Matematyki (MMM)” – kwartalnik ukazujący się od 2002 roku, zawiera artykuły popularnonaukowe, kącik olimpijski oraz liczne zadania, niektóre artykuły archiwalne można pobrać ze strony www.mmm.uni.wroc.pl.
- „Matematyka Społeczeństwo Nauczanie” – czasopismo o edukacji matematycznej, od czasu do czasu pojawiają się w nim interesujące artykuły o metodach olimpijskich, prenumeratę lub numery archiwalne można zamówić przez stronę Ośrodka Kultury Matematycznej www.imif.ap.siedlce.pl/okm.html.
- „Matematyka”– miesięcznik dla nauczycieli wydawany od 1948 roku z dobrym konkursem zadaniowym.
- „Kwant” – znakomity dwumiesięcznik rosyjski wydawany od 1970 roku, pełen materiałów dla olimpijczyków i nie tylko, numery archiwalne (do 2007 roku) można pobrać ze strony www.kvant.mccme.ru.
- „Crux Mathematicorum”– czasopismo kanadyjskie adresowane do uczniów szkół średnich i studentów, wydania archiwalne (1996–2005) do pobrania ze strony www.math.ca/crux.
- „Mathematics Competitions” – czasopismo australijskie poświęcone wyłącznie konkursom i olimpiadom, niektóre artykuły archiwalne można pobrać ze strony www.amt.edu.au/wfnmcj.html.

Zasoby internetowe

Przegląd portali internetowych rozpocząć należy od stron olimpiad:

- www.omg.edu.pl – strona Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów z zadaniami z zawodów oraz zadania z Internetowego Kółka Matematycznego dla gimnazjalistów
- www.om.edu.pl – strona Olimpiady Matematycznej z zadaniami ze wszystkich lat i etapów, w tym z olimpiad międzynarodowych, Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych, Zawodów Matematycznych Państw Bałtyckich, Czesko-Polsko-Słowackich Zawodów Matematycznych oraz z broszurami z obozów naukowych Olimpiady Matematycznej; są też linki do stron olimpiad krajowych i międzynarodowych
- www.imomath.com – materiały z Międzynarodowych Olimpiad Matematycznych
- www.archom.ptm.org.pl – archiwum zadań z OM z rozwiązaniami
- www-users.mat.uni.torun.pl/~sendlew/olimpiady.html – zadania z nieistniejącej już Małej Olimpiady Matematycznej (zastąpiła ją OMG)

Materiały pomocnicze można znaleźć również na portalach:

- www.sem.edu.pl – Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej, które organizuje konferencje na temat nauczania matematyki, a wśród materiałów pokonferencyjnych są artykuły omawiające metody olimpijskie
- www.matematyka.wroc.pl – Wrocławski Portal Matematyczny oferuje bogatą bazę materiałów dydaktycznych, pomysłów na prace badawcze, informacje o konkursach i olimpiadach oraz ligi zadaniowe
- www.matematyka.pl – polskie forum o matematyce, miejsce do dyskusji na przykład o zadaniach olimpijskich
- www.mccme.ru, www.math.ru – niezwykle przydatne i bogate w materiały zadaniowe strony w języku rosyjskim, można z nich pobierać książki (www.mccme.ru/free-books, www.math.ru/lib)
- www.problems.ru – tysiące zadań, każde ma metryczkę opisującą trudność oraz klasę, dla której jest przeznaczone
- www.artofproblemsolving.com – strona o matematyce olimpijskiej w języku angielskim z forum *MathLinks* dla olimpijczyków (www.artofproblemsolving.com/Forum/index.php)

I na koniec jeszcze kilka stron wydawnictw, z których pochodzi znaczna część książek, o których pisałem w tym artykule.

- www.aksjomat.torun.pl
- www.gwo.pl
- www.nowik.com.pl
- www.oficyna-adam.com.pl
- www.proszynski.pl
- www.tutor.torun.pl,
- www.wsip.pl
- www.ws-omega.com.pl

Posłowie

Historia rozwoju cywilizacji niosła wiele różnych odpowiedzi na pytanie: *Czym jest matematyka?* Dla jednych była to rygorystyczna dyscyplina naukowa, poddana reżimowi ścisłości i dedukcji (Tales), dla innych „sztuka dla sztuki", pożyteczna i przyjemna gimnastyka umysłu (Bhaskara), dla jeszcze innych – użyteczne narzędzie poznawania świata (Arystoteles). Matematyka nauczana w szkole powinna odzwierciedlać wszystkie te poglądy, gdyż na etapie formowania się indywidualnych zainteresowań uczniów ich motywacje do poznawania tego przedmiotu mogą być różne. Ważne jest, by każdy uczeń mógł znaleźć fundament, na którym będzie budował pozytywny stosunek do matematyki, a pomóc może mu w tym troskliwy, dbający o indywidualny rozwój każdego ucznia nauczyciel.

Chociaż tylko znikomy procent uczniów w przyszłości zwiąże się profesjonalnie z matematyką i będzie miał okazję docenić jej wewnętrzny porządek i estetykę, to wszyscy powinni rozumieć, że dostarcza ona języka do opisu otaczających nas zjawisk, że jest kluczem do ich poznania i zrozumienia. Wszyscy powinni więc odczuwać wewnętrzną motywację do uczenia się matematyki, gdyż będzie to ekwipunek na całe życie, przewodnik po świecie, w którym żyjemy.

Nie wszyscy uczniowie będą potrafili zrozumieć, dlaczego matematyka działa. Nad tym pytaniem łamali sobie zresztą głowy najwięksi uczeni dawnych czasów. Ale każdy z naszych uczniów powinien doświadczyć, jak ona działa. I to musimy im pokazać. Pokazać, jak pisał John Barrow – nauczyciel wybitnie uzdolnionego ucznia Newtona – „dlaczego bazgrząc na kartkach papieru, można dowiedzieć się, jak kręci się świat".

Nie ważne, ilu z naszych uczniów da się czarowi matematyki uwieść. Nawet jeśli zostaną w przyszłości lekarzami, aktorami lub politykami (a może właśnie wtedy), powinni pielęgnować pozytywny stosunek do logicznego myślenia i metod matematycznych, a to mamy obowiązek zaszczepić im my – nauczyciele matematyki.

Ośrodek Rozwoju Edukacji

CZY TWOJA SZKOŁA NALEŻY DO SIECI SZKÓŁ ODKRYWCÓW TALENTÓW?

WWW.ORE.EDU.PL/ODKRYWAMYTALENTY

UCZEŃ ZDOLNY

Poradnik przedstawia zagadnienia istotne dla nauczania matematyki na II, III i IV etapie edukacyjnym i jest skierowany do nauczycieli uczniów uzdolnionych matematycznie, choć czytelnik znajdzie tu również treści dotyczące aktywizacji matematycznej wszystkich uczniów. Zadania prezentują różnorodny poziom trudności i można z nich wybrać materiały dla każdego ucznia. Poradnik zawiera też wskazówki dla nauczycieli jak konstruować zadania, jak stawiać pytania i jak na nie odpowiadać, jak zorganizować koło matematyczne i konkurs, a także inne formy kształcenia. Jest to publikacja bardzo wyczekiwana w środowisku i potrzebna. Poradnik będzie cenną pozycją w biblioteczce nauczyciela matematyki.

Maria Mędrzycka
fragment recenzji

OŚRODEK ROZWOJU EDUKACJI
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
tel. 22 345 37 00, fax 22 345 37 70
mail: sekretariat@ore.edu.pl
www.ore.edu.pl

egzemplarz bezpłatny

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego