



OŚRODEK  
ROZWOJU  
EDUKACJI

Iwona Turnau, Stefan Turnau

## Matematyka realistyczna

Program nauczania matematyki  
dla II etapu edukacyjnego  
– klasy IV-VI szkoły podstawowej

## KONKURS NA OPRACOWANIE PROGRAMÓW NAUCZANIA KSZTAŁCENIA OGÓLNEGO

IDENTYFIKATOR ZESPOŁU AUTORSKIEGO

1	1	2	3	5	8
---	---	---	---	---	---

### *Matematyka realistyczna*

Program nauczania matematyki dla drugiego etapu edukacyjnego  
(klasy IV – VI szkoły podstawowej)  
zgodny z podstawą programową opublikowaną 14 maja 2010 r.

#### Spis treści

Wstęp .....	1
Założenia .....	2
Cele edukacyjne .....	3
Materiał nauczania .....	5
Realizacja treści podstawy programowej .....	9
Ocenianie kompetencji uczniów .....	13

### Wstęp

Program *Matematyka realistyczna* jest pierwszą próbą adaptacji teorii *Realistic Mathematics Education* do polskiego systemu szkolnego i najnowszej, aktualnej podstawy programowej. Jego kolejne wersje będą powstawać w trakcie tworzenia podręczników uczniowskich, przewodnika dydaktycznego dla nauczyciela, wreszcie po pierwszym cyklu jego realizacji. Tej ostatniej towarzyszyć powinien systematyczny i metodyczny monitoring.

Koncepcja programu i związanych z nią, niezbędnych metod, środków dydaktycznych i form organizacji pracy nauczyciela z uczniami bardzo odbiegają od szkolnej tradycji. Najwyraźniejszych zmian spowodowanych jego realizacją można więc oczekiwać w tych kompetencjach uczniów, których państwowy sprawdzian nie bada; można je będzie poznać za pomocą specjalnie konstruowanych testów, jakie proponujemy w ostatnim rozdziale, i ustnych rozmów z uczniami.

## Założenia

1. Podstawę teoretyczną programu stanowi koncepcja Realistycznego Nauczania Matematyki (*Realistic Mathematics Education*)<sup>1</sup>. Można ją krótko scharakteryzować następującymi cechami:

- posługiwanie się kontekstem
- posługiwanie się modelami
- posługiwanie się własnymi produktami i konstrukcjami uczniów
- interaktywność
- przeplatanie się linii tematycznych

Program jest przy tym zgodny z zaleceniami dydaktycznymi podstawy programowej, a w szczególności zaleceniem

- rozwijania czynnej i twórczej postawy uczniów w procesie zdobywania wiedzy matematycznej,
- nacisku na rachunek pamięciowy i posługiwanie się kalkulatorem przy rezygnacji z biegłości uczniów w technice rachunkowej,
- odejścia od wymagania precyzyjnych sformułowań i zapisów matematycznych na rzecz swobodnej i naturalnej wypowiedzi uczniów.

2. Materiał nauczania został zorganizowany w jednostki dydaktyczne, uszeregowane w celowej kolejności. W jednostce spletają się często dwie lub trzy linie tematyczne; nazwa jednostki sygnalizuje tylko jedną. Kolejno następujące po sobie jednostki często też wiąże jeden wspólny temat. Taka struktura programu realizuje zasadę przeplatania się w nauczaniu linii tematycznych.

3. Liczby dziesiętne (rozumiane jako liczby zapisywane w dziesiętkowym systemie pozycyjnym) i działania na nich zostały w programie umieszczone przed ułamkami zwykłymi. Algorytmy rachunkowe na tych liczbach są bowiem rozszerzeniem algorytmów dla liczb naturalnych, a więc łatwiejsze do rozumienia i pamiętania przez uczniów od algorytmów działań na ułamkach.

---

<sup>1</sup> Zob. np. Marja van den Heuvel-Panhuizen & Monica Wijers, Mathematics standards and curricula in the Netherlands, *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik* 2005 Vol. 37 (4); Adrian Treffers, *Three Dimentions*, Dordrecht: Reidel, 1987.

4. Związane z tym jest wprowadzenie systematycznej nauki racjonalnego posługiwania się przez uczniów kalkulatorem elektronicznym. Jest to konieczność wynikająca z następujących punktów podstawy programowej:

2. *Działania na liczbach naturalnych. Uczeń:*

3) *mnoży i dzieli liczbę naturalną przez liczbę naturalną jednocyfrową, dwucyfrową lub trzycyfrową pisemnie, w pamięci (w najprostszych przykładach) i za pomocą kalkulatora (w trudniejszych przykładach);*

10) *zapisuje ułamki zwykłe o mianownikach innych niż wymienione w pkt 9 w postaci rozwinięcia dziesiętnego nieskończonego (z użyciem trzech kropek po ostatniej cyfrze), dzieląc licznik przez mianownik w pamięci, pisemnie **lub za pomocą kalkulatora**;*

5. *Działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych. Uczeń:*

8) *wykonuje działania na ułamkach dziesiętnych, używając własnych, poprawnych strategii **lub z pomocą kalkulatora**.*

Kalkulator, nawet najprostszy, czterodziałaniowy, może być jednocześnie narzędziem poznawania liczb, działań i ich własności. Z nowymi liczbami - ułamkami dziesiętnymi, liczbami ujemnymi - uczniowie zetkną się i zaczną pomować ich sens w naturalny sposób, operując kalkulatorem. Także istotność kolejności wykonywania działań w obliczeniach ujawni się wyraziście, gdy będą wykonywane na kalkulatorze.

5. W programie zaproponowaliśmy budowanie praw rachunkowych i uproszczeń rachunku w oparciu o dwa modele mnożenia: 1) pole prostokąta jako model mnożenia dwóch liczb, 2) skalowanie jako model mnożenia liczby lub wielkości przez liczbę, zwaną wtedy skalą. Ten drugi, sugerowany przez matematyka Keitha Devlina<sup>2</sup>, nie ma jeszcze pełnego opracowania dydaktycznego; powinno ono powstać wraz podręcznikiem dla uczniów. Jest też naturalny przy wykonywaniu obliczeń na kalkulatorze. Oto kilka przykładów skalowania w kontekstach realnych i abstrakcyjnych.

Odległości na mapie są wynikiem skalowania odległości rzeczywistych skalą 1/100.000 lub 1:100.000 (zapisy równoważne).

Obniżka cen o 25% to ich skalowanie czynnikiem 0,75; podwyżka o 25% - skala 1,25.

Skalowanie jednego boku prostokąta zmienia pole w tej samej skali; skalowanie jednego czynnika iloczynu skaluje tak samo cały iloczyn (łączność). Skalowanie składników wspólną skalą tak samo skaluje sumę (rozdzielność).

Skalowanie czynników odwrotnymi skalami nie zmienia iloczynu, np.  $5 \cdot 16 = 10 \cdot 8$  (zastosowano odwrotne skale 2 i  $\frac{1}{2}$ ). Jednakowe skalowanie dwu liczb nie zmienia ich ilorazu. Np.  $12,45 : 1,5 = 124,5 : 15$  (skala 10).

---

<sup>2</sup> Zob. [http://www.maa.org/devlin/devlin\\_06\\_08.html](http://www.maa.org/devlin/devlin_06_08.html),  
[http://www.maa.org/devlin/devlin\\_0708\\_08.html](http://www.maa.org/devlin/devlin_0708_08.html), [http://www.maa.org/devlin/devlin\\_09\\_08.html](http://www.maa.org/devlin/devlin_09_08.html)

Ułamek jest wynikiem skalowania liczby naturalnej. Np.  $7/5$  to  $7$  w skali  $1/5$  czyli  $1/5 \cdot 7$ ;  $2/5 : 7/5 = 2 : 7$  (skala  $5$ );  $2/5 + 7/5 = 1/5 \cdot (2+7)$  ( $2$  w skali  $1/5$  plus  $7$  w skali  $1/5$  to  $2+7$  w skali  $1/5$ ).

6. Przymiotnik „realistyczna” wskazuje, że w rozwijaniu myślenia matematycznego szeroko wykorzystywane będą konteksty realistyczne dla uczniów, to jest przemawiające do ich wyobraźni, a niekoniecznie „praktyczne”. Znaczą też, że jednostki dydaktyczne, w których ingeruje geometria, będą zorganizowane jako praca uczniów z użyciem materiałów konkretnych i środków dydaktycznych przeznaczonych do manipulacji (realnej lub wirtualnej), takich jak geoplan, środowisko Cabri, inne programy komputerowe.

7. Zakładamy, że podstawową formą organizacyjną lekcji jest interaktywna praca w grupach, w wyniku której uczniowie dochodzą do nowej wiedzy, poszerzają ją i pogłębiają. Z tego względu szczegółowy materiał nauczania został ujęty w aktywnościach. Są one tutaj jedynie zasygnalizowane; rozwinięcie powinno się znaleźć w podręczniku ucznia i poradniku nauczyciela.

## Cele edukacyjne

Głównym celem nauczania matematyki na każdym poziomie edukacyjnym jest rozwijanie w uczniach kompetencji matematycznych. Mogens Niss<sup>3</sup> wyróżnia ich osiem:

1. myślenie typu matematycznego,
2. formułowanie i rozwiązywanie problemów matematycznych,
3. modelowanie matematyczne,
4. rozumowanie matematyczne,
5. reprezentowanie obiektów matematycznych,
6. posługiwanie się matematyczną symboliką i formalizmami,
7. komunikowanie się w matematyce i o matematyce,
8. używanie środków pomocniczych i narzędzi.

Program *Matematyka realistyczna* rozwija wszystkie wymienione kompetencje, kładąc szczególny nacisk na kompetencje 2, 3 i 7.

---

<sup>3</sup> Profesor dydaktyki matematyki Uniwersytetu Roskilde (Dania), członek grupy ekspertów w projekcie PISA.

**Rozwiązywanie problemów** jest najczęściej spotykanym typem aktywności uczniów. Ten program, przez wiązanie z sobą różnych światów pojęciowych, stwarza uczniom szerokie pole do zadawania pytań i formułowania problemów, a także do szukania różnych dróg rozwiązania, porównywania ich i oceniania.

**Modelowanie matematyczne** jako aktywność uczniów przejawia się w trzech sytuacjach:

- gdy uczeń dobiera lub tworzy matematyczną strukturę (figura geometryczna, równanie) jako model sytuacji realistycznej (także abstrakcyjnej), w celu rozwiązania dotyczącego jej problemu,
- gdy dla sytuacji abstrakcyjnej (np. działania arytmetycznego) uczeń znajduje obiekt realistyczny (konkretny lub mniej abstrakcyjny, jak figura geometryczna) jako jej model, pomagający w oswojeniu tej sytuacji i pamiętaniu jej własności,
- gdy rozwiązując nowe problemy uczeń odwołuje się do problemu wcześniej rozwiązanego jako ich modelu paradygmatycznego (np. zadania na porównywanie różnicowe i ilorazowe).

Program *Matematyka realistyczna* stwarza okazje do matematycznego modelowania niemal na każdej lekcji.

**Komunikowanie się** matematyczne jest celem edukacyjnym. Jednocześnie jest ono na lekcjach niezbędnym warunkiem tworzenia się i rozwijania pojęć i procedur abstrakcyjnych, a więc rozumnego rozwiązywania problemów, w tym stosowania matematyki w sytuacjach realnych. Struktura programu *Matematyka realistyczna* umożliwi stopniowe kształtowanie pojęć w interakcji, przez negocjowanie ich rozumienia w dyskusjach, w czasie pracy w grupach i pod kierunkiem nauczyciela. Przekazywanie sobie i omawianie zapisów i ich uproszczeń będzie prowadziło do rozumienia procedur formalnych i algorytmów, a nie tylko ich mechanicznego wykonywania. Przekazywanie sobie i omawianie różnych sposobów rozwiązania problemu będzie kształtować otwarte podejście do problemów i rozszerzy repertuar metod.

## Materiał nauczania

**Linie tematyczne: L** Liczby i działania, **A** Myślenie algebraiczne, **F** Figury geometryczne, **M** Mierzenie i miary, **J** Język matematyki, **Alg** Algorytmy

Jednostka dydaktyczna	Liczba lekcji <sup>4</sup>	Aktywności	Linie tematyczne	Podstawa programowa
<b>KLASA IV</b>				
1. Liczby naturalne I	32	Liczenie grupami, np. po 2, 3, 7, 12, zapisywanie liczb słowami i cyframi. Porównywanie liczb. Wielkie liczby (potęgi 10 i 2).  Liczby naturalne na osi liczbowej: kojarzenie miejsca i liczby, kalibrowanie osi. Zaokrąglanie.  Tarcza zegara (różne kształty), kalendarz. Długość odcinka osi; „przesuwanie” odcinka (np. $8-2=10-4$ )  Odległość w m, km; upływ czasu w godzinach, minutach, dniach, tygodniach, miesiącach, latach.  Rzymski zapis liczb.	L, J, F, M, Alg	1. 1) 2) 3) 4) 5)  12. 3) 4) 6)
2. Figury geometryczne I	12	Tort, placki (różne kształty); średnica, promień, cięciwa; przekątna; środek; kąt, ramiona, porównywanie; kąty wierzchołkowe; ułamek $1/n$	F, J	8. 1) 5), 9. 4) 5) 6), 4. 1)
3. Dodawanie i odejmowanie liczb naturalnych	23	Odejmowanie jako ujmowanie i jako dopełnianie (różne konteksty).  Dodawanie i odejmowanie w pamięci; techniki (także „przesuwanie” składników, np. $38-24=40-26$ ). Kalkulator	L, J, Alg	2. 1) 2)  12. 3) 4)

<sup>4</sup>

Wraz z czasem na sprawdziany, omówienie sprawdzianów, powtórzenie materiału i rezerwę.

		Dodawanie i odejmowanie z pomocą zapisu; upraszczanie zapisu.		
		Obliczenia zegarowe i kalendarzowe.		
4. Ułamki dziesiętne	21	Mierzenie linijką, zapis długości z przecinkiem (5,3 cm) i bez (5 cm 3 mm). Rysowanie odcinka danej długości.	L, M, J, Alg	7. 4) 4. 7) 11) 5. 2)
		Ułamki dziesiętne na osi liczbowej: kojarzenie punktu i liczby, skalowanie osi; znaczenie drugiej i dalszych cyfr po przecinku. Zaokrąglanie.		
		Skale 10%, 25%, 50%, 100% i ich użycie.		
		Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych, w pamięci i z zapisem; upraszczanie zapisu.		



**Linie tematyczne: L** Liczby i działania, **A** Myślenie algebraiczne, **F** Figury geometryczne, **M** Mierzenie i miary, **J** Język matematyki, **Alg** Algorytmy

5. Figury geometryczne II	15	Trójkąty i czworokąty: klasyfikowanie, opis własności.  Prostokąt, jego pole i obwód.  Prostokąty o równych polach/obwodach.  Znajdowanie pól wielokątów na kracie; tworzenie wielokątów o zadanym polu. Obliczanie obwodu wielokąta.	F, M	11. 1) 2),  8. 4),  9. 1)
6. Równania 1	16	Równoważne wypowiedzi i zapisy związków typu „ $x$ jest o $a$ większe $b$ ”, w tym równania.  Wymyślanie kontekstów dla równań typu $x+a=b$ itp. Zadawanie pytań i szukanie odpowiedzi.	A, J	6. 2),  14. 1) 3)
7. Proste prostopadłe i równoległe	7	Zginanie papieru, opis relacji między krawędziami, tworzenie i używanie terminów geometrii.	F, J	7. 2)
<b>KLASA V</b>				
8. Równania 2	12	Równoważne wypowiedzi i zapisy związków typu „ $x$ jest $a$ razy większe $b$ ”, w tym równania.  Wymyślanie kontekstów dla równań typu $a \cdot x = b$ itp. Zadawanie pytań i szukanie odpowiedzi.	A, F, J	6. 2),  14. 1) 3)
9. Wielościany	13	Klasyfikowanie i opisywanie modeli wielościanów; prostopadłościany w otoczeniu  Rozpłaszczanie modelu prostopadłościanu/ostrosłupa, rozpoznawanie i rysowanie siatek.	F, J	10. 1) 2) 3) 4)
10. Pole prostokąta	12	„Ile papieru na oklejenie pudełka?” Pole prostokąta, jednostka, $\text{cm}^2$ (długości boków całkowite). Proporcjonalne	F, M	11. 2)

		wydłużanie i skracanie boków („skalowanie”) a pole.		
		Różne techniki mnożenia liczb naturalnych.		
11. Wyrażenie liczbowe, obliczanie wartości wyrażenia	10	Zapisywanie i obliczanie pola powierzchni siatki prostopadłościanu: różne wyrażenia. Mnożenie w pamięci, także przez „skalowanie” czynników (np. $5 \cdot 14 = 10 \cdot 14 : 2$ lub $5 \cdot 14 = 10 \cdot 7$ ). Kolejność działań. Gry i zagadki związane z wyrażeniami.	A, J	6. 2), 2. 5) 11), 5. 7), 11. 4)
12. Mnożenie liczb dziesiętnych	6	„Ile papieru na oklejenie pudełka?” Pole prostokąta o niecałkowitych długościach boków. „Skalowanie” (długości, ceny, masy) liczbą dziesiętną. Techniki mnożenia liczby dziesiętnej przez całkowitą, liczb z jedną cyfrą po przecinku: różne sposoby, także przez sprowadzenie do całkowitych „skalowaniem” (np. $2,3 \cdot 1,5 = (23 \cdot 15) : (10 \cdot 10)$ )	L, Alg	5. 2) 8), 11. 2)

**Linie tematyczne: L Liczby i działania, A Myślenie algebraiczne, F Figury geometryczne, M Mierzenie i miary, J Język matematyki, Alg Algorytmy**

13. Równania 3	10	Zadania, gdzie dany jest bok i obwód/pole prostokąta, należy znaleźć drugi bok. Różne sposoby zależnie od danych; równanie. Obliczenia w pamięci (różne sposoby) lub kalkulatorem.	A, Alg	6. 2) 3)
14. Zadania tekstowe I	15	Analiza i rozwiązywanie zadań tekstowych o różnorodnych kontekstach. Różne metody.	A, J	14.
15. Liczby naturalne II	12	Rozkładanie na składniki i czynniki. Liczby pierwsze; rozkład na czynniki pierwsze. Podzielność, cechy.	L, Alg	2. 4) 6) 7) 8) 9)
16. Stosunek, skala, ułamek zwykły	18	Korzystanie ze skali planu, mapy, modelu; rysowanie w skali.  Równoznaczne zapisy $m/n$ i $m:n$ w różnych kontekstach; część i całość. $m/n$ jako $1/n \cdot m$	F, L, J, Alg	12. 8), 4. 1) 2) 3)

		czyli m „skalowane” przez $1/n$ . Ułamek zwykły i dziesiętny, właściwy i niewłaściwy. Znajdowanie punktu $m/n$ na osi liczbowej.		
		Rozpoznawanie ułamków (stosunków) równoważnych. Skracanie i rozszerzanie ułamka.		
17. Długość, pole, masa	10	Stosunki jednostek długości i pola. Masa i ciężar; jednostki masy i ich stosunki. Zamiana jednostek w zadaniach.	J, Alg	12. 7)
18. Zadania tekstowe II	15	Analiza i rozwiązywanie zadań tekstowych o różnorodnych kontekstach, w tym droga-czas-prędkość. Różne metody.	A, J	14., 12. 9)
<b>KLASA VI</b>				
19. Konstrukcje geometryczne	12	Posługiwanie się linijką, ekiem i cyrklem (proste równoległe i prostopadłe, okrąg, przenoszenie odcinka).  Posługiwanie się kątomierzem.  Konstruowanie trójkątów; warunek istnienia.		7. 1) 3), 8. 2) 3), 9. 2)
20. Liczby ujemne	15	Sytuacje, gdzie modelem jest para liczb („z... do...” na osi liczbowej, czarne i czerwone żetony, zmiany temperatury, zmiany poziomu wody w rzece); pary równoważne. Porównanie różnicowe, znak minus i wartość bezwzględna; liczba ujemna na osi liczbowej.  Porównywanie, dodawanie i odejmowanie liczb całkowitych w kontekstach; algorytmizowanie tych operacji.	J, L, Alg	3.
21. Własności trójkątów i czworokątów	12	Trójkąty na kracie; suma kątów; kąty trójkąta równoramiennego; trójkąt równoboczny, własności; wnioski. Równoległobok, prostokąt, kwadrat, romb, trapez na kracie; kąty, suma kątów; kąty między przekątnymi; bezpośrednie wnioski.	F, J	9. 3) 4) 5)

**Linie tematyczne: L Liczby i działania, A Myślenie algebraiczne, F Figury geometryczne, M Mierzenie i miary, J Język matematyki, Alg Algorytmy**

22. Działania na ułamkach zwykłych I	15	<p>Użycie standardowego modelu ułamka – prostokąta stałej szerokości.</p> <p>Porównywanie ułamków, różne sposoby. „Skalowanie” (długości, ceny, masy) ułamkiem zwykłym; zamiana jednostek.</p> <p>Techniki mnożenia ułamków wzorowane na mnożeniu ułamków dziesiętnych, m. in. przez „skalowanie” czynników (np. <math>\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = (2 \cdot 1) : (3 \cdot 5) = 2 \cdot 1/3 \cdot 5</math>. Dzielenie ułamków przez sprowadzanie do wspólnego mianownika, tj. wspólnego czynnika „skalującego”, np. <math>\frac{2}{3} : \frac{1}{5} = (2 \cdot 5/3 \cdot 5 : 1 \cdot 3/3 \cdot 5 = 2 \cdot 5 : 1 \cdot 3)</math>.</p> <p>Algorytmizowanie tych działań.</p>	L, Alg	5. 1) 5)
23. Elementy statystyki	12	<p>Gromadzenie danych, ich porządkowanie, przedstawianie w tabeli i na wykresie.</p> <p>Odczytywanie i interpretowanie danych publikowanych. Interpretowanie i tworzenie wypowiedzi z użyciem słowa „procent” jako synonimu „setnych”.</p>	L, J	13.
24. Objętość	15	<p>Pojemność naczyń, jednostki: l, ml.</p> <p>Objętość prostopadłościanu (model), wzór, jednostki. Sprawdzanie objętości deklarowanej na opakowaniach.</p>	F, M, A, J	11. 4) 5)
25. Działania na ułamkach zwykłych II	15	<p>„<math>\frac{2}{3}</math> i <math>\frac{1}{2}</math> to liczby. Jak je sensownie dodać?”</p> <p>Pomysły uczniów konfrontowane z modelem. Pomysł: rozszerzyć lub skrócić do wspólnego mianownika, tj. wspólnego czynnika „skalującego”. Algorytmizowanie operacji.</p>	L, J, Alg	5. 1)
26. Działania na liczbach różnej postaci	15	<p>Zapisywanie tej samej liczby w postaci ułamka zwykłego, dziesiętnego, liczby mieszanej, procentu; przekształcanie z jednej formy na inne. Rachunki, w których</p>	L, J, Alg	5. 3)

występują liczby w różnej postaci.

27. Zadanie tekstowe III	15	Analiza i rozwiązywanie zadań tekstowych o różnorodnych kontekstach, w tym zadań ze sprawdzianów kompetencji.	A, J	14.
RAZEM	385			

## Realizacja treści podstawy programowej

Poniższa tabela wskazuje jednostki dydaktyczne programu *Matematyka realistyczna*, w których kształtowana jest wiedza lub umiejętność podstawy programowej, wymieniona w pierwszej kolumnie.

Uczeń:	Jednostki dydaktyczne
1. 1) odczytuje i zapisuje liczby naturalne wielocyfrowe;	1.
2) interpretuje liczby naturalne na osi liczbowej;	1.
3) porównuje liczby naturalne;	1.
4) zaokrągla liczby naturalne;	1.
5) liczby w zakresie do 30 zapisane w systemie rzymskim przedstawia w systemie dziesiętkowym, a zapisane w systemie dziesiętkowym przedstawia w systemie rzymskim.	1.
2. 1) dodaje i odejmuje w pamięci liczby naturalne dwucyfrowe, liczby wielocyfrowe w przypadkach, takich jak np. $230 + 80$ lub $4600 - 1200$ ; liczbę jednocyfrową dodaje do dowolnej liczby naturalnej i odejmuje od dowolnej liczby naturalnej;	3.
2) dodaje i odejmuje liczby naturalne wielocyfrowe pisemnie, a także za pomocą kalkulatora;	3.
3) mnoży i dzieli liczbę naturalną przez liczbę naturalną jednocyfrową, dwucyfrową lub trzycyfrową pisemnie, w pamięci (w najprostszycy przykładach) i za pomocą kalkulatora (w trudniejszych przykładach);	10.
4) wykonuje dzielenie z resztą liczb naturalnych;	15.
5) stosuje wygodne dla niego sposoby ułatwiające obliczenia, w tym przemienność i łączność dodawania i mnożenia;	11.
6) porównuje różnicowo i ilorazowo liczby naturalne;	15.
7) rozpoznaje liczby naturalne podzielne przez 2, 3, 5, 9, 10, 100;	15.
8) rozpoznaje liczbę złożoną, gdy jest ona jednocyfrowa lub dwucyfrowa, a także, gdy na istnienie dzielnika wskazuje	15.

poznana cecha podzielności;	
9) rozkłada liczby dwucyfrowe na czynniki pierwsze;	15.
10) oblicza kwadraty i sześciany liczb naturalnych;	10. 24.
11) stosuje reguły dotyczące kolejności wykonywania działań;	11. 12. 26.
12) szacuje wyniki działań.	3. 4. 11. 12. 14. 26. 27.
<b>3.</b> 1) podaje praktyczne przykłady stosowania liczb ujemnych;	20.
2) interpretuje liczby całkowite na osi liczbowej;	20.
3) oblicza wartość bezwzględną;	20.
4) porównuje liczby całkowite;	20.
5) wykonuje proste rachunki pamięciowe na liczbach całkowitych.	20.
<b>4.</b> 1) opisuje część danej całości za pomocą ułamka;	16.
2) przedstawia ułamek jako iloraz liczb naturalnych, a iloraz liczb naturalnych jako ułamek;	16.
3) skraca i rozszerza ułamki zwykłe;	16.
4) sprowadza ułamki zwykłe do wspólnego mianownika;	22. 25. 26.
5) przedstawia ułamki niewłaściwe w postaci liczby mieszanej i odwrotnie;	26.
6) zapisuje wyrażenia dwumianowane w postaci ułamka dziesiętnego i odwrotnie;	17.
7) zaznacza ułamki zwykłe i dziesiętne na osi liczbowej oraz odczytuje ułamki zwykłe i dziesiętne zaznaczone na osi liczbowej;	4.
8) zapisuje ułamek dziesiętny skończony w postaci ułamka zwykłego;	26.
9) zamienia ułamki zwykłe o mianownikach będących dzielnikami liczb 10, 100, 1000 itd. na ułamki dziesiętne skończone dowolną metodą (przez rozszerzanie ułamków zwykłych, dzielenie licznika przez mianownik w pamięci, pisemnie lub za pomocą kalkulatora)	26.

- 10) zapisuje ułamki zwykłe o mianownikach innych niż 26.  
wymienione w pkt 9 w postaci rozwinięcia dziesiętnego nieskończonego (z użyciem trzech kropek po ostatniej cyfrze), dzieląc licznik przez mianownik w pamięci, pisemnie lub za pomocą kalkulatora;
- 11) zaokrągla ułamki dziesiętne; 4.
- 12) porównuje ułamki (zwykłe i dziesiętne).
- 5.** 1) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli ułamki zwykłe o 22. 25.  
mianownikach jedno- lub dwucyfrowych, a także liczby mieszane;
- 2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli ułamki dziesiętne w pamięci 4. 12  
(w najprostszych przykładach), pisemnie i za pomocą kalkulatora (w trudniejszych przykładach);
- 3) wykonuje nieskomplikowane rachunki, w których występują 26.  
jednocześnie ułamki zwykłe i dziesiętne;
- 4) porównuje różnicowo ułamki;
- 5) oblicza ułamek danej liczby naturalnej; 22.
- 6) oblicza kwadraty i sześciany ułamków zwykłych i 12. 24.  
dziesiętnych oraz liczb mieszanych;
- 7) oblicza wartości prostych wyrażeń arytmetycznych, stosując 26.  
reguły dotyczące kolejności wykonywania działań;
- 8) wykonuje działania na ułamkach dziesiętnych, używając 12.  
własnych, poprawnych strategii lub z pomocą kalkulatora;
- 9) szacuje wyniki działań. 22. 25. 26.
- 6.** 1) korzysta z nieskomplikowanych wzorów, w których 11.  
występują
- oznaczenia literowe, zamienia wzór na formę słowną;
- 2) stosuje oznaczenia literowe nieznanymi wielkościami liczbowymi 6. 13.  
i zapisuje proste wyrażenie algebraiczne na podstawie informacji osadzonych w kontekście praktycznym;
- 3) rozwiązuje równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą 13.  
występującą po jednej stronie równania (poprzez zgadywanie, dopełnianie lub wykonanie działania odwrotnego).



7. 1) rozpoznaje i nazywa figury: punkt, prosta, półprosta, odcinek; 19.
- 2) rozpoznaje odcinki i proste prostopadłe i równoległe; 7.
- 3) rysuje pary odcinków prostopadłych i równoległych; 19.
- 4) mierzy długość odcinka z dokładnością do 1 milimetra; 4.
- 5) wie, że aby znaleźć odległość punktu od prostej, należy znaleźć długość odpowiedniego odcinka prostopadłego. 19.
8. 1) wskazuje w kątach ramiona i wierzchołek; 2.
- 2) mierzy kąty mniejsze od 180 stopni z dokładnością do 1 stopnia; 19.
- 3) rysuje kąt o mierze mniejszej niż 180 stopni; 19.
- 4) rozpoznaje kąt prosty, ostry i rozwarty; 5.
- 5) porównuje kąty; 2.
- 6) rozpoznaje kąty wierzchołkowe i kąty przyległe oraz korzysta z ich własności. 21.
9. 1) rozpoznaje i nazywa trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne, równoboczne i równoramienne; 5.
- 2) konstruuje trójkąt o trzech danych bokach; ustala możliwość zbudowania trójkąta (na podstawie nierówności trójkąta); 19.
- 3) stosuje twierdzenie o sumie kątów trójkąta; 21.
- 4) rozpoznaje i nazywa kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok, trapez; 2. 21.
- 5) zna najważniejsze własności kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trapezu; 21.
- 6) wskazuje na rysunku, a także rysuje cięciwę, średnicę, promień koła i okręgu. 2.
10. 1) rozpoznaje graniastosłupy proste, ostrosłupy, walce, stożki i kule w sytuacjach praktycznych i wskazuje te bryły wśród innych modeli brył; 9.
- 2) wskazuje wśród graniastosłupów prostopadłościanny i sześciany i uzasadnia swój wybór; 9.

- 3) rozpoznaje siatki graniastosłupów prostych i ostrosłupów; 9.
- 4) rysuje siatki prostopadłościanów. 9.
- 11.** 1) oblicza obwód wielokąta o danych długościach boków; 5.
- 2) oblicza pola: kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trójkąta, trapezu przedstawionych na rysunku (w tym na własnym rysunku pomocniczym) oraz w sytuacjach praktycznych; 10.
- 3) stosuje jednostki pola: m<sup>2</sup>, cm<sup>2</sup>, km<sup>2</sup>, mm<sup>2</sup>, dm<sup>2</sup>, ar, hektar (bez zamiany jednostek w trakcie obliczeń); 17.
- 4) oblicza objętość i pole powierzchni prostopadłościanu przy danych długościach krawędzi; 11. 24.
- 5) stosuje jednostki objętości i pojemności: litr, mililitr, dm<sup>3</sup>, m<sup>3</sup>, cm<sup>3</sup>, mm<sup>3</sup>; 24.
- 6) oblicza miary kątów, stosując przy tym poznane własności kątów i wielokątów. 21.
- 12.** 1) interpretuje 100% danej wielkości jako całość, 50% – jako połowę, 25% – jako jedną czwartą, 10% – jako jedną dziesiątą, a 1% – jako setną część danej wielkości liczbowej; 4.
- 2) w przypadkach osadzonych w kontekście praktycznym oblicza procent danej wielkości w stopniu trudności typu 50%, 10%, 20%; 4.
- 3) wykonuje proste obliczenia zegarowe na godzinach, minutach i sekundach; 1. 3.
- 4) wykonuje proste obliczenia kalendarzowe na dniach, tygodniach, miesiącach, latach; 1. 3.
- 5) odczytuje temperaturę (dodatnią i ujemną); 20.
- 6) zamienia i prawidłowo stosuje jednostki długości: metr, centymetr, decymetr, mili metr, kilometr; 1.
- 7) zamienia i prawidłowo stosuje jednostki masy: gram, kilogram, dekagram, tona; 17.
- 8) oblicza rzeczywistą długość odcinka, gdy dana jest jego długość w skali, oraz długość odcinka w skali, gdy dana jest jego rzeczywista długość; 16.

- 9) w sytuacji praktycznej oblicza: drogę przy danej prędkości i danym czasie, prędkość przy danej drodze i danym czasie, czas przy danej drodze i danej prędkości; stosuje jednostki prędkości: km/h, m/s. 18.
- 13.** 1) gromadzi i porządkuje dane; 23.
- 2) odczytuje i interpretuje dane przedstawione w tekstach, tabelach, diagramach i na wykresach. 23.
- 14.** 1) czyta ze zrozumieniem prosty tekst zawierający informacje liczbowe; 6. 8. 14.
- 2) wykonuje wstępne czynności ułatwiające rozwiązanie zadania, w tym rysunek pomocniczy lub wygodne dla niego zapisanie informacji i danych z treści zadania; 14.
- 3) dostrzega zależności między podanymi informacjami; 6. 8. 14.
- 4) dzieli rozwiązanie zadania na etapy, stosując własne, poprawne, wygodne dla niego strategie rozwiązania; 14.
- 5) do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym stosuje poznaną wiedzę z zakresu arytmetyki i geometrii oraz nabyte umiejętności rachunkowe, a także własne poprawne metody; 14.
- 6) weryfikuje wynik zadania tekstowego, oceniając sensowność rozwiązania. 14.

## Ocenianie kompetencji uczniów

Ocena kompetencji uczniów może być dokonywana w celu ich selekcji na użytek dalszych etapów edukacyjnych lub podmiotów zatrudniających, lub w celu dydaktycznym, jako informacja dla samego ucznia i dla nauczyciela, służąca ukierunkowaniu dalszego procesu kształcenia – ocena formatywna.

1. Najskuteczniejszym rodzajem oceny formatywnej wydaje się być samoocena ucznia. Jak wykazał w szerokich badaniach<sup>5</sup> J. Hattie, czynnikiem najsilniej pozytywnie wpływającym na średnią ocenę klasy w standardowych testach było systematyczne posługiwanie się przez nauczyciela samooceną uczniów, tj. sytuacją, w której każdy uczeń sam ocenia swoje wiadomości, umiejętności, rozumienie itp. jakościowo lub ilościowo w jakiejś skali. Zachęcamy wprowadzenie samooceny do repertuaru środków pedagogicznych w klasach realizujących program *Matematyka realistyczna*.

Samoocena może być organizowana w różny sposób. Jednym z nich jest rozdanie uczniom karteczek jak poniższa.

### SAMOOCENA UCZNIĄ KL. IV – Dodawanie i odejmowanie

	Nie umiem	Często się mylę	Czasami się mylę	Umiem dobrze
Dodawanie pisemne				
Odejmowanie pisemne				
Dodawanie pamięciowe				
Odejm. pamięciowe				

W okresie wprowadzania samooceny nauczyciel będzie pomagał uczniom w dokonaniu jej wyboru, uświadamiając im celowość zrobienia tego w sposób racjonalny, nie przypadkowy.

Inna możliwość to wspólna poprawa sprawdzianu. Po zakończeniu sprawdzianu zadania są na tej samej lekcji wspólnie rozwiązywane na tablicy, a następnie każdy uczeń znajduje błędy w swojej pracy i sam je poprawia. Samoocena polega wówczas na wyszukiwaniu i zauważaniu błędów i braków przez ucznia, a nie przez nauczyciela. Na koniec każdy uczeń może wystawić sobie ocenę, słownie lub w punktach.

Jeszcze inna wypróbowana forma samooceny to „pisanie listów”. Każdy uczeń pisze list do fikcyjnego kolegi, w którym opisuje, czego nauczył się w wybranym okresie. Powinien w

---

<sup>5</sup> Hattie, John (2008). *Visible Learning: A Synthesis of over 800 Meta-Analyses Relating to Achievement*. London: Routledge.

liście przyznać się, czego nie zrozumiał, i pochwalić się tym, co mu już nie sprawia trudności. Listy mogą być, za zgodą autorów, wykorzystane przez nauczyciela w jego dalszej pracy.

Ocena, jaką sobie wystawia uczeń, może być uwzględniona w informowaniu rodziców o jego postępach, a także przy ustalaniu oficjalnej oceny okresowej. Takie działanie stwarza dydaktycznie cenną atmosferę wzajemnego zaufania między uczniem, nauczycielem i rodzicami.

2. Ocena przeprowadzana przez nauczyciela (zwana sprawdzianem) w formie zadań przekazywanych uczniowi ustnie lub na piśmie do rozwiązania i podania odpowiedzi na piśmie także powinna zawsze pełnić funkcję oceny formatywnej. Znaczy to, że treść i sformułowanie zadań powinny zapewniać uzyskanie przez nauczyciela możliwie najwięcej informacji o stanie tej wiedzy i tych umiejętności ucznia, które go interesują. Program *Matematyka realistyczna* kładzie nacisk na samodzielne i elastyczne stosowanie przez uczniów poznawanych metod i technik matematycznych. Do oceny tak rozumianych osiągnięć uczniów nie mogą być użyte tak zwane zadania zamknięte (testy wyboru), ani zadania zbudowane według wyuczonego schematu, schematycznie rozwiązywane. Zaproponowane poniżej typy zadań w sprawdzianach zostały wypracowane przez Instytut Freudenthala w Utrechcie<sup>6</sup> i są stosowane w szkołach holenderskich oraz tam, gdzie funkcjonują programy oparte na teorii Realistycznego Nauczania Matematyki.

Typ I – serie zadań ujawniających świadomy i właściwy wybór metody.

Przykład:

	A kosztuje 14,50 zł	
	B kosztuje 8,25 zł	
	C kosztuje 1,75 zł	Jaka jest reszta z dzielenia 3604 przez 100?
$5 \cdot 4,99 \text{ zł} =$	D kosztuje 5,50 zł	
	Ile to razem?	
Twoja metoda:	Twoja metoda:	Twoja metoda:
Pisemnie <input type="checkbox"/>	Pisemnie <input type="checkbox"/>	Pisemnie <input type="checkbox"/>
W pamięci <input type="checkbox"/>	W pamięci <input type="checkbox"/>	W pamięci <input type="checkbox"/>
Kalkulatorem <input type="checkbox"/>	Kalkulatorem <input type="checkbox"/>	Kalkulatorem <input type="checkbox"/>
Rozwiązanie:	Rozwiązanie:	Rozwiązanie:

---

<sup>6</sup> Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). Assessment and realistic mathematics education. Utrecht: CD-β Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.

Typ II – zadania, do których może być kilka poprawnych odpowiedzi.

Przykład: Dane są ceny towarów, należy wybrać zakup w granicach danej kwoty.

Typ III – zadania do wyboru. Uczeń może wybrać zadanie, które będzie rozwiązywać, według swojej oceny stopnia trudności.

Typ IV – zadania własne ucznia.

Przykład: a) Dane są ceny kilku produktów, zadaniem ucznia jest utworzyć zadanie (zadać pytanie) i rozwiązać je. b) Utworzyć i rozwiązać dwa zadania na odejmowanie, jedno łatwe i jedno trudne.

Typ V – serie zadań formalnie równoważnych, różniących się kontekstem, językiem lub innymi cechami, których wpływ na myślenie ucznia interesuje nauczyciela.

Przykład: a) A i B mają razem 21 orzechów, B ma 3 razy więcej niż A; ile ma A, ile B? b) A ma  $\frac{1}{3}$  liczby orzechów, jakie ma B; ile ma A, ile B, jeżeli razem mają 21 orzechów? c)  $x$  jest 3 razy większe od  $y$ , a  $x+y=21$ ; znajdź  $x$  i  $y$ .

Typ VI – zadania bliźniacze. Są to pary zadań takich, że rozwiązanie jednego może być użyte do ułatwienia rozwiązania drugiego.

Przykład: a) A kosztuje 1,5 Euro. Oblicz, ile to złotych, gdy 1 Euro = 4,35 zł. b) B kosztuje 4,5 Euro. Oblicz, ile to złotych, gdy 1 Euro = 4,35 zł.

Typ VII – zadania „z podpórką”.

Przykład:

Oblicz w pamięci:

$86 + 57 = 143$		$85 + 57 =$
$86 + 56 =$	$57 + 86 =$	
$860 + 570 =$		$86 + 86 + 57 + 57 =$
$143 - 86 =$	$85 + 58 =$	

(Wykonanie zadania informuje, w jakim stopniu uczeń korzysta z ułatwień, jakie wynikają z praw działań.)

W celu skutecznego pisemnego sprawdzania osiągnięć w klasach realizujących program *Matematyka realistyczna* potrzebne będzie stworzenie banku odpowiednich zadań wraz z kryteriami oceny odpowiedzi uczniów, adekwatnymi do informacji o wiedzy ucznia, jakiej ma służyć zadanie.

3. Konieczne przygotowanie do sprawdzianu kompetencji po klasie VI będzie wymagało rozwiązywania przez uczniów zadań ze sprawdzianów archiwalnych i przeprowadzenia sprawdzianów próbnych, ocenianych według oficjalnych kryteriów.



OŚRODEK  
ROZWOJU  
EDUKACJI

Aleje Ujazdowskie 28  
00-478 Warszawa  
tel. 22 345 37 00  
fax 22 345 37 70

[www.ore.edu.pl](http://www.ore.edu.pl)



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY

