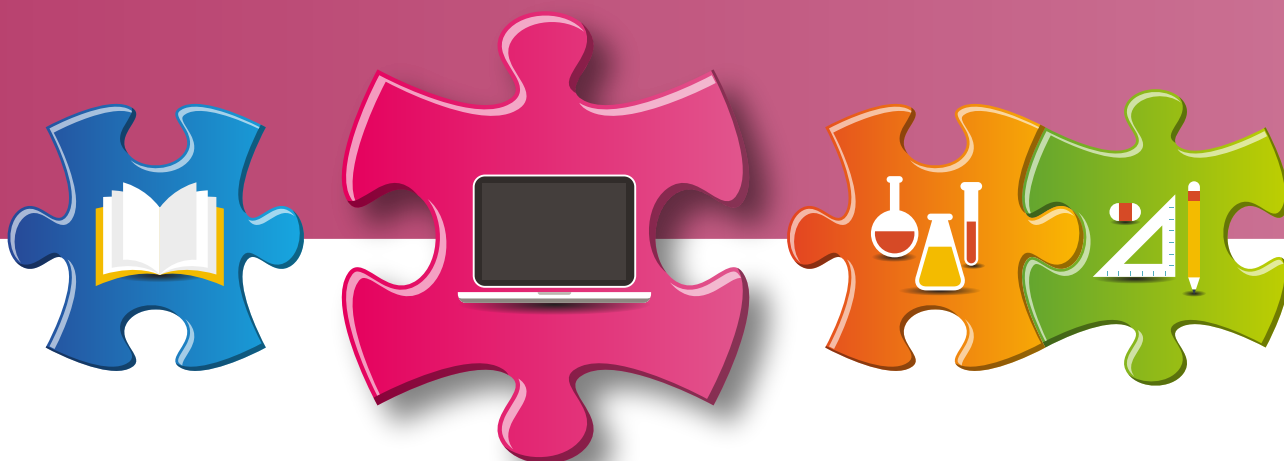


Jacek Stańdo

Monika Spławaska-Murmyło

Problemy matematyczne ułatwiające tworzenie zaawansowanych algorytmów w szkole ponadpodstawowej

- ✓ Zbiory
- ✓ Logika
- ✓ Aproksymacja
- ✓ Kombinatoryka, prawdopodobieństwo, statystyka
- ✓ Ekstremum funkcji



Redakcja językowa i korekta
Anna Wawryszuk

Projekt graficzny, projekt okładki
Wojciech Romerowicz, ORE

Skład i redakcja techniczna
Grzegorz Dębiński

Projekt motywu graficznego „Szkoly ćwiczeń”
Aneta Witecka

ISBN 978-83-65890-47-4 (Zestawy materiałów dla nauczycieli szkół ćwiczeń – informatyka)

ISBN 978-83-65890-80-1 (Zestaw 8. Rozwój myślenia komputacyjnego w szkole ponadpodstawowej)

ISBN 978-83-65890-95-5 (Zeszyt 4. Problemy matematyczne ułatwiające tworzenie zaawansowanych algorytmów w szkole ponadpodstawowej)

Warszawa 2017
Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
www.ore.edu.pl

Publikacja jest rozpowszechniana na zasadach wolnej licencji Creative Commons – Użycie niekomercyjne 3.0 Polska (CC-BY-NC).

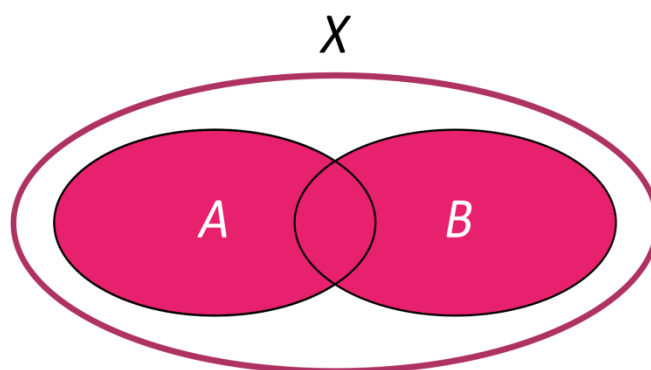
Wstęp

Podstawą myślenia komputacyjnego jest umiejętność posługiwania się algorytmami, na których opiera się praca komputera. W szerokim rozumieniu algorytm to inaczej rozpisany krok po kroku przepis rozwiązania zadania zawierający opis danych oraz czynności do wykonania. Młodszym uczniom wskazuje się podobieństwo do przepisu kulinarnego lub instrukcji obsługi dowolnego urządzenia, aby wyjaśnić zasady pisania algorytmu. Uczniowie szkoły ponadpodstawowej wiedzą już, jak napisać proste lub nawet bardziej skomplikowane polecenia, ale nierzadko nie mają wystarczających podstaw z matematyki, by ich umiejętność algorytmicznego myślenia uznać za ugruntowaną. Dlatego uważamy za konieczne podsumowanie niezbędnych wiadomości matematycznych w formie kompendium.

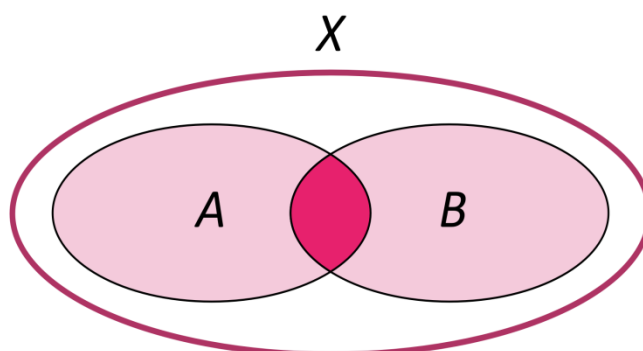
Zbiory

Zbiory oznaczamy dużymi literami: A , B , C itd. Symbolem X będziemy oznaczać zbiór uniwersalny, przestrzeń. Jeśli element x należy do zbioru A , będziemy to zapisywać $x \in A$. Jeśli element nie należy do zbioru A , będziemy to zapisywać $x \notin A$.

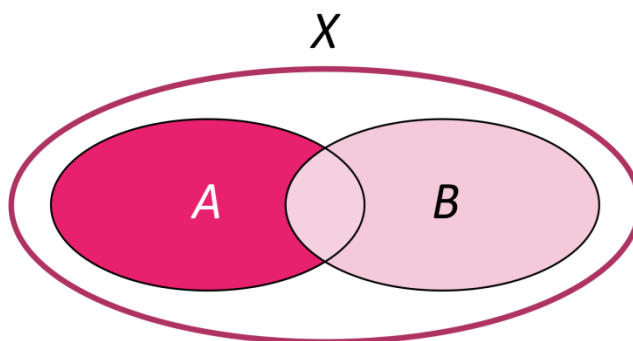
Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór, do którego należą elementy zbioru A lub B , i zapisujemy *suma zbiorów* A i B .



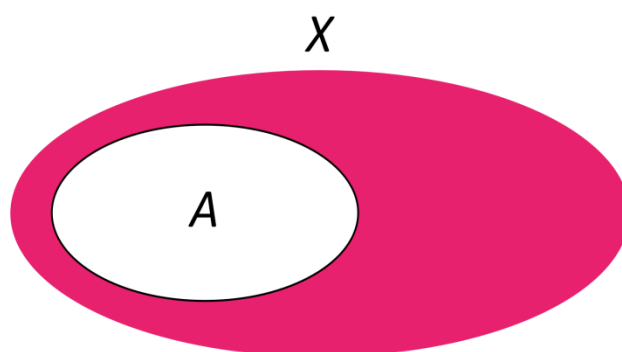
Częścią wspólną zbiorów A i B nazywamy zbiór, do którego należą elementy zbiorów A i B , i zapisujemy *część wspólna zbiorów* A i B .



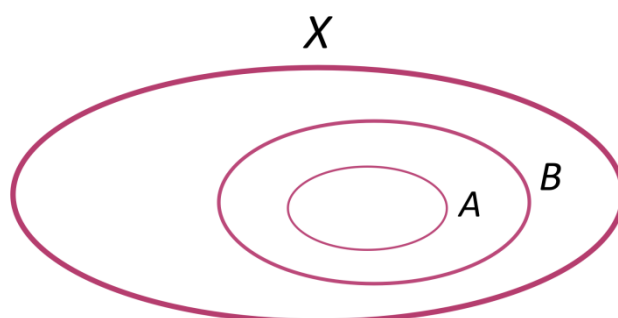
Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór, do którego należą elementy zbioru A i nie należą elementy zbioru B , i zapisujemy *różnica zbiorów A i B*



Dopełnieniem zbioru A nazywamy zbiór $X \setminus A$ i zapisujemy *A prim.*



Mówimy, że zbiór A **zawiera się** w zbiorze B , jeśli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B , i zapisujemy *A zawiera się w B* .



Własności

część wspólna zbiorów A i B równa się część wspólna zbiorów B i A

Suma zbiorów A i B suma zbioru C równa się suma zbioru A i suma zbiorów B i C

Iloczyn zbiorów A i B należy do C

Suma zbiorów A i B równa się różnica zbiorów A i B suma iloczyn zbiorów A i B suma różnica zbiorów B i A

Przykład

Niech $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 8\}$. Wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, A' .

Rozwiązanie

suma zbiorów A i $B = \{1, 2, 5, 8\}$

część wspólna zbiorów A i $B = \{1\}$

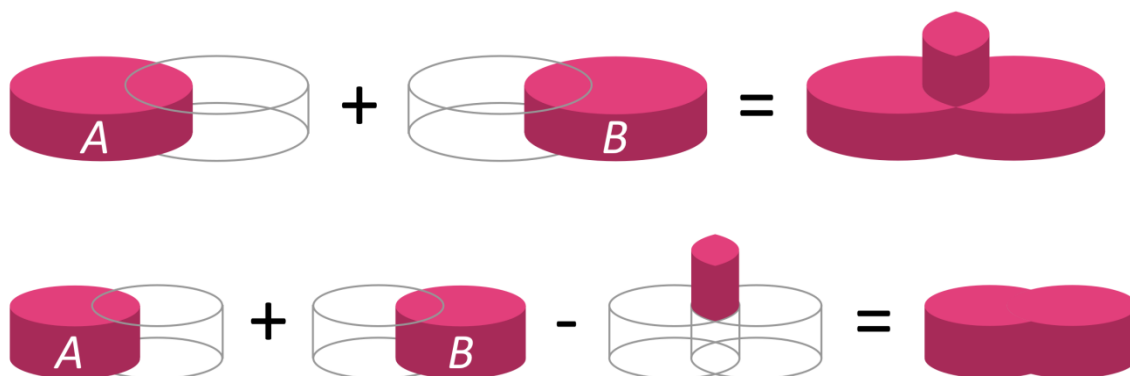
różnica zbiorów A i $B = \{2, 5\}$

dopełnienie zbioru $A = \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

Prawo sumy

Niech A i B będą zbiorami skończonymi. Wtedy liczba elementów sumy zbiorów A i B równa się liczba elementów zbioru A plus ilość elementów zbioru B minus liczba elementów iloczynu zbiorów A i B .

Zapis $|X|$ oznacza liczbę elementów zbioru X .



Zauważmy, że jeśli iloczyn zbiorów A i B równa się zbiór pusty, to liczba elementów sumy zbioru A i B równa się liczba elementów zbioru A plus liczba elementów zbioru B .

Zasada wielokrotności

Liczba wielokrotności a mniejszych od liczby b jest równa $\left[\frac{a}{b}\right]$, gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nieprzekraczającą x (np. $\left[3\frac{1}{2}\right] = 3$).

Przykład 1

Oblicz liczbę wielokrotności 7 mniejszych od 30.

Rozwiązanie

Wielokrotności 7 mniejsze od 30 to 7, 14, 21, 28. Są zatem cztery wielokrotności. Można je również wyznaczyć z zasady wielokrotności, $\left[\frac{30}{7}\right] = 4$.

Przykład 2

Oblicz liczbę wielokrotności 7 mniejszych od 100.

Rozwiązanie

Liczba wielokrotności 7 mniejszych od 100 jest równa $\lfloor \frac{100}{7} \rfloor = 14$.

Przykład 3

Niech X będzie zbiorem liczb naturalnych dodatnich mniejszych lub równych 10. Niech $A \subset X$ będzie zbiorem liczb podzielnych przez 2, zbiór $B \subset X$ zbiorem liczb podzielnych przez 3. Ile jest liczb podzielnych przez 2 lub 3 w zbiorze X ?

Rozwiązanie

$A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{3, 6, 9\}$, stąd $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$. Liczb podzielnych przez 2 lub 3 w zbiorze X jest równa 6.

Powyższy przykład możemy także rozwiązać, stosując **prawo sumy**. $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{3, 6, 9\}$, $A \cap B = \{6\}$. Liczb podzielnych przez 2 lub 3 w zbiorze X jest liczba elementów sumy zbioru A i B równa się liczba elementów zbioru A plus liczba elementów zbioru B minus liczba elementów iloczynu zbiorów A i $B = 4 + 3 - 1 = 6$.

Przykład 4

Niech X będzie zbiorem liczb naturalnych dodatnich mniejszych lub równych 100. Niech $A \subset X$ będzie zbiorem liczb podzielnych przez 2, zbiór $B \subset X$ zbiorem liczb podzielnych przez 3. Ile jest liczb podzielnych przez 2 lub 3 w zbiorze X ?

Rozwiązanie

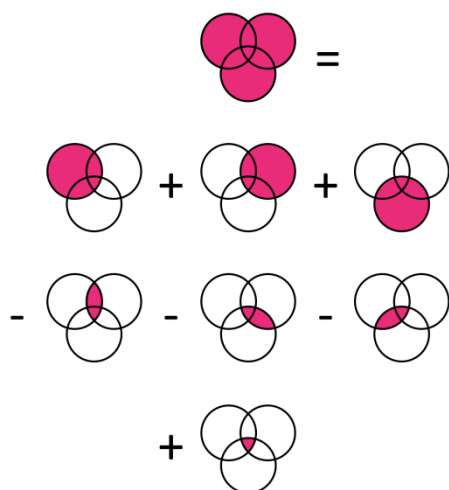
Zastosujmy prawo sumy i zasadę wielokrotności. Liczba elementów w zbiorze X podzielnych przez 2 lub 3 jest równa

liczba elementów sumy zbiorów A i B równa się liczba elementów zbioru A plus liczba elementów zbioru B minus liczba elementów iloczynu zbiorów A i $B = \lfloor \frac{100}{3} \rfloor + \lfloor \frac{100}{2} \rfloor - \lfloor \frac{100}{6} \rfloor = 33 + 50 - 16 = 67$.

Zasada włączania i wyłączania

Dla dowolnych trzech zbiorów A_1, A_2, A_3 zachodzi równość:

liczba elementów sumy zbioru A jeden suma A dwa suma A trzy równa się liczba elementów zbioru A jeden plus liczba elementów zbioru A dwa liczba elementów zbioru A trzy minus liczba elementów iloczynu zbioru A jeden i A dwa minus liczba elementów iloczynu zbioru A dwa i A trzy minus liczba elementów iloczynu zbioru A jeden i A trzy plus liczba elementów iloczynu zbioru A jeden iloczyn A dwa iloczyn A trzy.



Przykład

Niech X będzie zbiorem liczb naturalnych dodatnich mniejszych lub równych 30. Niech $A \subset X$ będzie zbiorem liczb podzielnych przez 2, zbiór $B \subset X$ zbiorem liczb podzielnych przez 3, zbiór $C \subset X$ zbiorem liczb podzielnych przez 5. Ile jest liczb podzielnych przez 2 lub 3 lub 5 w zbiorze X ?

Rozwiązanie

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$, $C = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$, stąd $A \cup B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30\}$. Liczb podzielnych przez 2 lub 3 lub 5 w zbiorze X jest 22.

Stosując zasadę **włączania i wyłączania** oraz zasadę **wielokrotności**, mamy:

liczba elementów zbioru A równa się część całkowita z trzydzieści podzielić przez dwa równa się piętnaście

liczba elementów zbioru B równa się część całkowita z trzydzieści podzielić przez trzy równa się dziesięć

liczba elementów zbioru C równa się część całkowita z trzydzieści podzielić przez pięć równa się sześć

liczba elementów iloczynu zbioru A i B równa się część całkowita z trzydzieści podzielić przez sześć równa się pięć

liczba elementów iloczynu zbioru A i B równa się część całkowita z trzydzieści podzielić przez sześć równa się pięć

liczba elementów iloczynu zbioru A i C równa się część całkowita z trzydzieści podzielić przez dziesięć równa się trzy

liczba elementów iloczynu zbioru C i B równa się część całkowita z trzydzieści podzielić przez piętnaście równa się dwa

liczba elementów iloczynu zbioru C, B i A równa się część całkowita z trzydzieści podzielić przez trzydzieści równa się jeden.

Liczb podzielnych przez 2 lub 3 lub 5 w zbiorze X jest liczba elementów sumy zbiorów A, B i C równa się liczba elementów zbioru A plus liczba elementów zbioru B plus liczba elementów zbioru C minus liczba elementów iloczyn zbioru A i B minus liczba elementów iloczyn zbioru B i C plus liczba elementów iloczyn zbiorów A, B i C równa się piętnaście plus dziesięć plus sześć minus pięć minus trzy minus dwa plus jeden równa się dwadzieścia dwa.

Zasada maksimum

Każdy niepusty i ograniczony podzbiór liczb naturalnych zawiera liczbę największą.

Przykład

Niech A będzie zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 6 i mniejszych lub równych 100. Podaj największą liczbę zbioru A .

Rozwiązanie

$A = \{0, 6, 12, \dots, 84, 96\}$. Największa liczba zbioru A to 96.

Sortowanie polega na uporządkowaniu zbioru danych względem pewnych cech.

Przykład

Posortuj zbiór liczb $\{-2, -1, 3, 8, -12, 0\}$ rosnąco (to znaczy od najmniejszej do największej).

Rozwiązanie

$\{-12, -2, -1, 0, 3, 8\}$

Algorytmy sortowania to wydajna metoda porządkowania danych.

Logika

Zdanie logiczne p to zdanie, któremu możemy przypisać wartość logiczną: prawdę (1) albo fałsz (0).

Zdania oznaczamy małymi literami p, q, s . Wartość logiczną zdania zapisujemy $p = 1$ – zdanie prawdziwe, $p = 0$ – zdanie fałszywe.

Negacją (zaprzeczeniem) zdania p nazywamy zdanie postaci „Nieprawda, że p ” i zapisujemy $\sim p$.

Przykład

Zdanie p : Temperatura powietrza wynosi 25° . Zdanie $\sim p$: Nieprawda, że temperatura powietrza wynosi 25° .

Tablica wartości logicznych

p	$\sim p$
1	0
0	1

Alternatywą zdań p, q nazywamy zdanie postaci „ p lub q ” i zapisujemy $p \vee q$.

Przykład

Zdanie p : Temperatura powietrza wynosi 25° . Zdanie q : Pada deszcz. Zdanie $p \vee q$: Temperatura powietrza wynosi 25° lub pada deszcz.

Tablica wartości logicznych

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Koniunkcją zdań p , q nazywamy zdanie postaci „ p i q ” i zapisujemy $p \wedge q$.

Przykład

Zdanie p : Temperatura powietrza wynosi 25°. Zdanie q : Pada deszcz. Zdanie p i q : Temperatura powietrza wynosi 25° i pada deszcz.

Tablica wartości logicznych

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Implikacją zdań p i q nazywamy zdanie postaci „Jeśli p , to q ” i zapisujemy jeśli p to q .

Przykład

Zdanie p : Zdam egzamin. Zdanie q : Pojadę na wakacje. Zdanie jeśli p to q : Jeśli zdam egzamin, to pojadę na wakacje.

Tablica wartości logicznych

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Równoważnością zdań p , q nazywamy zdanie w postaci „ p wtedy i tylko wtedy, gdy q ” i zapisujemy $p \Leftrightarrow q$.

Przykład

Zdanie p : Zdam egzamin. Zdanie q : Pojadę na wakacje. Zdanie $p \Leftrightarrow q$: Zdam egzamin wtedy i tylko wtedy, gdy pojadę na wakacje.

Tablica wartości logicznych

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Tautologią (prawem logicznym) nazywamy zdanie, które jest zawsze prawdziwe.

Przykład

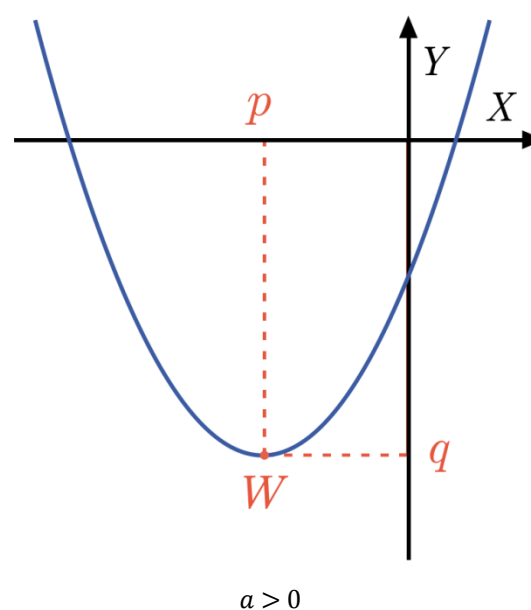
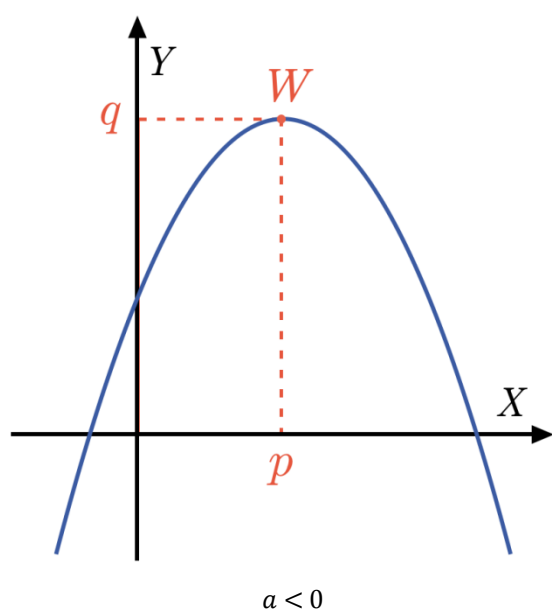
Zdanie w postaci p lub nie q jest zawsze prawdziwe: Pada deszcz lub nieprawda, że pada deszcz.

Ekstremum funkcji

Funkcja kwadratowa i jej własności

Definicja: Funkcję w postaci, f od x równa się a x kwadrat plus b x plus c gdzie a jest różne od 0 nazywamy **funkcją kwadratową**.

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola.



Jeśli a jest większe od 0, to minimum funkcji kwadratowej jest równe y równa się minus delta podzielić przez cztery a dla x równa się minus b podzielić przez dwa a

Jeśli a jest mniejsze od 0, to maksimum funkcji kwadratowej jest równe y równa się minus delta podzielić przez cztery a dla x równa się minus b podzielić przez dwa a

Optymalizacja to proces poszukiwania najlepszego (optymalnego) rozwiązania problemu. Działanie to może zawierać jedno lub kilka kryteriów oceny. Poszukiwanie najmniejszego kosztu, największej powierzchni, najkrótszej drogi to przykłady zastosowań optymalizacji.

Przykład

Suma dwóch liczb wynosi 12. Znajdź takie liczby, aby ich iloczyn był największy.

Rozwiązanie

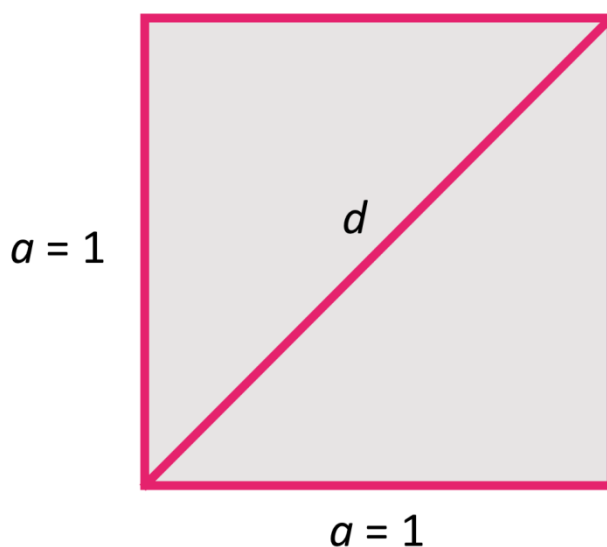
Oznaczmy szukane liczby symbolami u i v . Wiadomo, że $u + v = 12$, zatem $v = 12 - u$. Utwórzmy funkcję $f(u) = u(12 - u)$. Zauważmy, że f jest funkcją kwadratową, $a = -1$. Zatem maksimum funkcji f dla $u = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{-2} = 6$. Szukane liczby to $u = 6$, $v = 6$.

Aproksymacja

Aproksymacja to przybliżone rozwiązanie.

Przykład

Oblicz długość przekątnej kwadratu o boku 1.



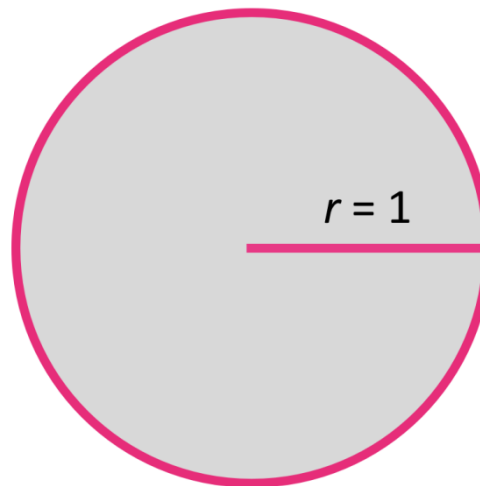
Rozwiązanie

d równa się a razy pierwiastek z dwa

Aproksymacja (przybliżenie) tej liczby to $\sqrt{2} \approx 1,4$.

Przykład

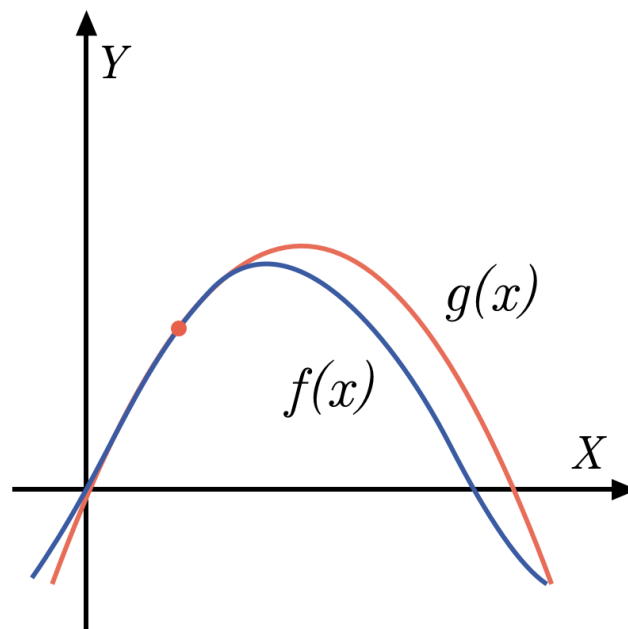
Oblicz pole koła o promieniu 1.

**Rozwiązanie**

P równa się pi r kwadrat równa się pi

Aproksymacja (przybliżenie) tej liczby to $\pi \approx 3,14$.

Aproksymacja funkcji f to funkcja g , która jest jej przybliżeniem.



Kombinatoryka, prawdopodobieństwo, statystyka

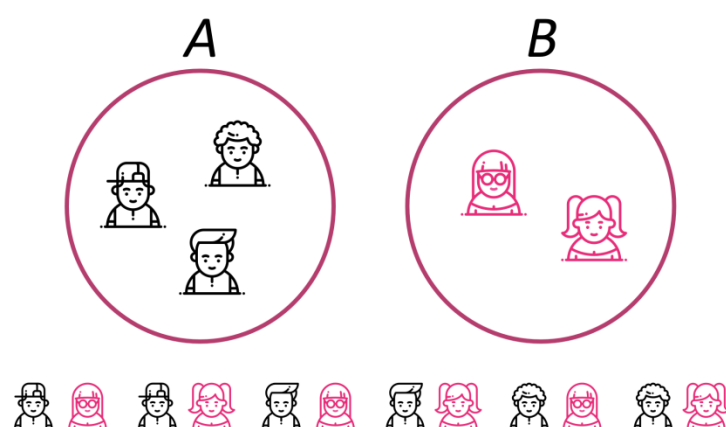
Prawo iloczynu

Mamy zbiory A i B . Załóżmy, że wyboru elementów w zbiorze A można dokonać na n różnych sposobów, w zbiorze B na m różnych sposobów. Wtedy pary elementów zbiorów A i B w ustalonej kolejności można wybrać na $m \cdot n$ sposobów.

Przykład

W zbiorze A jest trzech chłopców, a w zbiorze B dwie dziewczynki. Na ile sposobów można wybrać pary: dziewczynka–chłopiec?

Rozwiązanie



$$|A| \cdot |B| = 6$$

Mamy sześć par.

Permutacją zbioru n -elementowego nazywamy dowolny ciąg n -wyrazowy składający się ze wszystkich elementów.

Liczba permutacji zbioru n -elementowego jest równa P od n równa się n silnia.

Przykład 1

Ze zbioru $A = \{2, 3, 8\}$ wybieramy kod trzejelementowy. Ile jest wszystkich kodów?

Rozwiązanie

Wypiszmy wszystkie możliwe kody: $(2, 3, 8)$, $(2, 8, 3)$, $(8, 2, 3)$, $(8, 3, 2)$, $(3, 8, 2)$, $(3, 2, 8)$. Wszystkich kodów jest sześć.

Liczbę kodów możemy także policzyć, stosując wzór na liczbę permutacji. $|A| = 3$, więc $P(3) = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Przykład 2

Ze zbioru $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ wybieramy kod pięcioelementowy. Ile jest wszystkich kodów?

Rozwiązanie

$|A| = 5$, więc $P(5) = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Kombinacją zbioru n -elementowego nazywamy dowolny podzbiór k -elementowy.

Liczba kombinacji jest równa $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Przykład 1

Ze zbioru $A = \{2, 3, 8\}$ wybieramy dwie cyfry. Ile jest wszystkich możliwości?

Rozwiązanie

Wypiszmy wszystkie możliwości: (2, 8), (3, 8), (2, 3). Są trzy możliwości. Liczbę możliwości możemy także policzyć, stosując wzór na liczbę kombinacji. Zatem $C_3^2 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$.

Przykład 2

Ze zbioru $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ wybieramy dwuelementowy podzbiór. Ile jest wszystkich możliwości?

Rozwiązanie

$$C_6^2 = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

Wariacją bez powtórzeń zbioru n -elementowego nazywamy ciąg k -wyrazowy składający się z różnych elementów. Liczba wariacji bez powtórzeń jest równa $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Przykład 1

Ze zbioru $A = \{2, 3, 8\}$ wybieramy dwuwyzrazowe ciągi o różnych elementach. Ile jest wszystkich możliwości?

Rozwiązanie

Wypiszmy wszystkie możliwości: (2, 3), (2, 8), (8, 3), (3, 2), (8, 2), (3, 8). Jest sześć możliwości.

Liczbę możliwości możemy także policzyć, stosując wzór na liczbę wariacji bez powtórzeń.

$$\text{Zatem } V_3^2 = \frac{3!}{1!} = 6.$$

Przykład 2

Ze zbioru $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ wybieramy dwuelementowe ciągi o różnych elementach. Ile jest wszystkich możliwości?

Rozwiązanie

$$C_6^2 = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

Wariacją z powtórzeniami zbioru n -elementowego nazywamy dowolny ciąg k -wyrazowy. Liczba wariacji z powtórzeniami jest równa $\bar{V}_n^k = n$ do potęgi k tej

Przykład 1

Ze zbioru $A = \{2, 3, 8\}$ wybieramy dowolne dwuwyzrazowe ciągi. Ile jest wszystkich możliwości?

Rozwiązanie

Wypiszmy wszystkie możliwości: $(2, 3), (2, 8), (8, 3), (3, 2), (8, 2), (3, 8), (2, 2), (3, 3), (8, 8)$. Jest dziewięć możliwości.

Liczbę możliwości możemy także policzyć, stosując wzór na liczbę wariacji z powtórzeniami. Zatem $\bar{V}_3^2 = 3^2 = 9$

Przykład 2

Ze zbioru $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ wybieramy dwuelementowe dowolne ciągi. Ile jest wszystkich możliwości?

Rozwiązanie

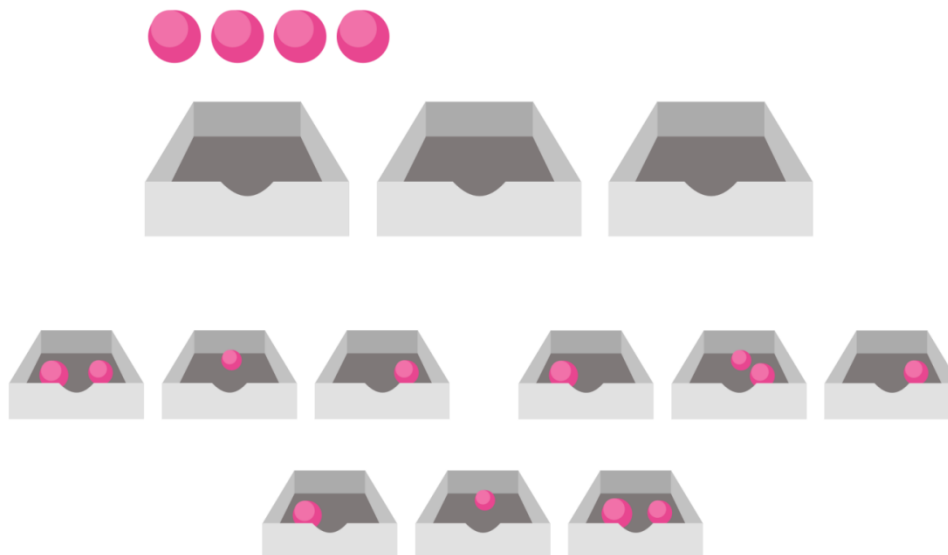
$$\bar{V}_6^2 = 6^2 = 36$$

Zasada szufladkowa Dirichleta

Mamy k przedmiotów i wkładamy je do n różnych szuflad $k > n$. Wtedy w co najmniej jednej szufladzie znajdują się co najmniej dwa przedmioty.

Przykład

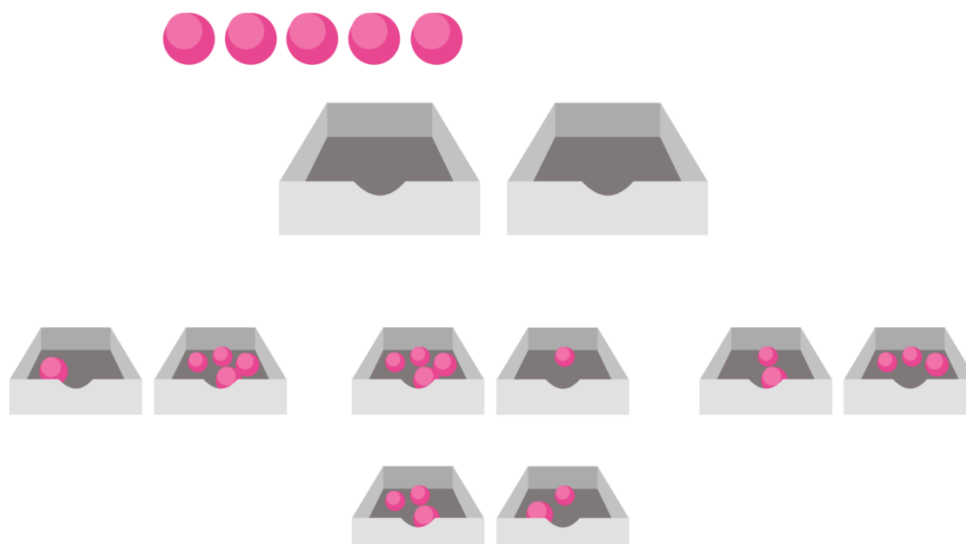
Mamy 3 szuflady i 4 kulki. Rozmieścimy je na różne sposoby.



Na podstawie powyższego przykładu możemy zdefiniować zasadę szufladkową. Mamy k przedmiotów i wkładamy je do n różnych szuflad. Wtedy w co najmniej jednej szufladzie znajdują się co najmniej $\lceil \frac{k}{n} \rceil$ przedmiotów.

Przykład

Mamy 2 szuflady i 5 kulek. Rozmieścimy je na różne sposoby. Zauważmy, że $\lceil \frac{5}{2} \rceil = 3$.



Zasada zliczania rozmieszczeń

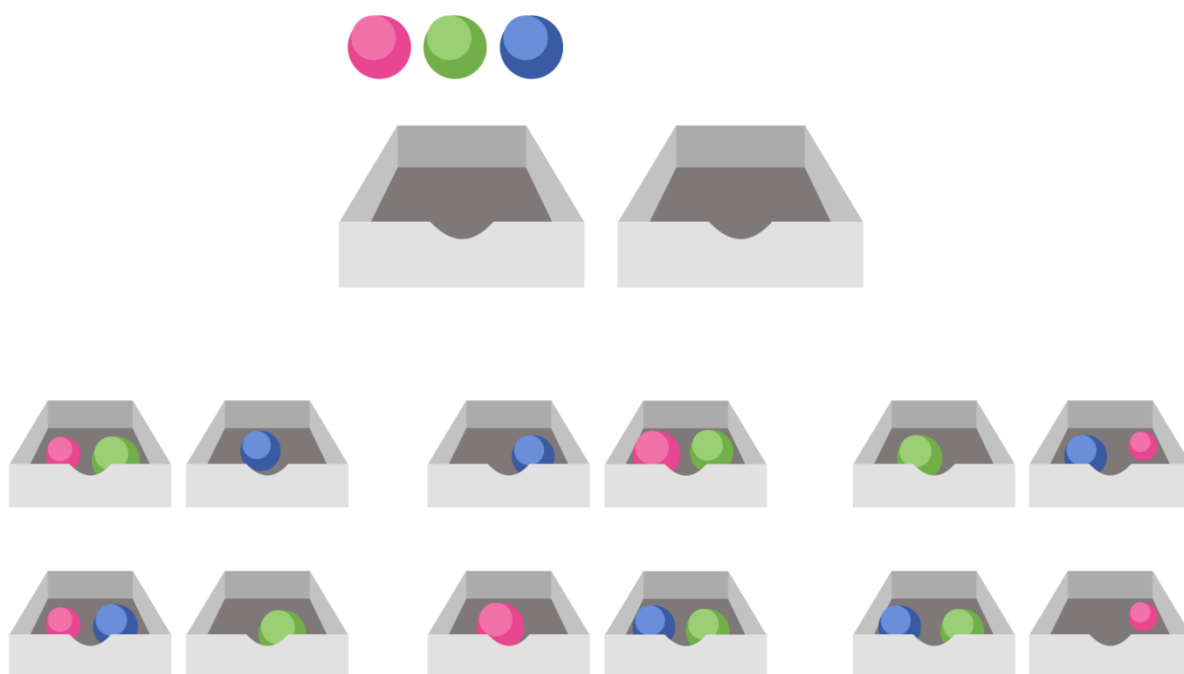
Liczba sposobów wyborów różnych n -różnych przedmiotów w różnych szufladach jest równa n plus k minus jeden po k plus jeden

Przykład

Mamy 2 szuflady i 3 różne kulki. Ile jest wszystkich rozmieszczeń?

Rozwiązanie

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{4}{2} = 6$$



Zasada zliczania podziałów uporządkowanych

Mamy n -elementowy zbiór przedmiotów. Chcemy je umieścić w k szufladach. Każda szuflada będzie zawierać ustaloną liczbę przedmiotów. Uwaga, w szufladach nie odróżniamy kolejności przedmiotów.

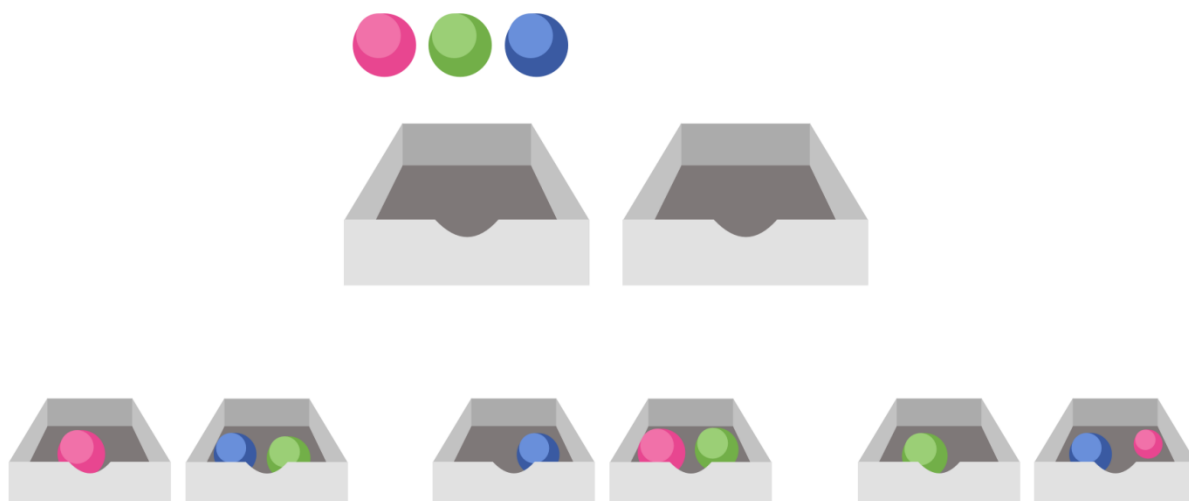
Liczba różnych możliwości jest równa $n!$ podzielić przez n jeden silnia razy n dwa silnia i tak dalej aż to n k silnia, gdzie n_k oznacza liczbę przedmiotów w k -tej szufladzie i n równa się n jeden plus n dwa i tak dalej aż do plus n k .

Przykład

Mamy 2 szuflady. W pierwszej możemy umieścić 1 kulę, w drugiej 2 kule. Ile jest wszystkich możliwości?

Rozwiązanie

$$\frac{3!}{1!2!} = 3$$



Doświadczeniem losowym nazywamy procedurę wielokrotnego powtarzania, która ma więcej niż jeden wynik. Zbiór wyników nazywamy **przestrzenią zdarzeń** i oznaczamy Ω .

Przykład

Rzucamy monetą. W wyniku rzutów monetą możemy otrzymać albo orła, albo reszkę, zatem $\Omega = \{\text{orzeł}, \text{reszka}\}$.

Zdarzeniem losowym A nazywamy dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń Ω .

Przykład

Rzucamy monetą. Zdarzenie losowe polega na wyrzuceniu orła. Zatem $\Omega = \{\text{orzeł}, \text{reszka}\}$, $A = \{\text{orzeł}\}$, $A \subset \Omega$.

Niech Ω będzie skończoną przestrzenią zdarzeń elementarnych, $A \subset \Omega$ zdarzeniem losowym. **Prawdopodobieństwem** zdarzenia A nazywamy liczbę $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Przykład

Rzucamy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia orła.

Rozwiązanie

$$\Omega = \{\text{orzeł}, \text{reszka}\}, A = \{\text{orzeł}\}, A \subset \Omega, P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$$

Zmienną losową nazywamy funkcję, która zdarzeniom losowym przypisuje liczbę.

Przykład

Rzucamy monetą. Jeśli wypadnie orzeł, to zmienna losowa przyjmuje wartość 0, jeśli reszka, to zmienna losowa przyjmuje wartość 2.

Zdarzenie losowe	orzeł	reszka
Zmienna losowa	0	2

Przykład

Rzucamy kostką do gry. Zmienna losowa opisana jest w tabeli.

Zdarzenie losowe	wyrzucamy 1	wyrzucamy 2	wyrzucamy 3	wyrzucamy 4	wyrzucamy 5	wyrzucamy 6
Zmienna losowa	2	4	1	0	0	5

Wartością oczekiwaną nazywamy liczbę określającą spodziewany wynik doświadczenia losowego.

Przykład 1

Rzucamy monetą. Jeśli wypadnie orzeł, to zmienna losowa przyjmuje wartość 0, jeśli reszka, to zmienna losowa przyjmuje wartość 2. Oblicz wartość oczekiwaną.

Rozwiązanie

Zdarzenie losowe	orzeł	reszka
Zmienna losowa	0	2
Prawdopodobieństwo zdarzenia	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Wartość oczekiwana: $EX = 0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Przykład 2

Rzucamy kostką do gry. Zmienna losowa jest opisana w tabeli. Oblicz wartość oczekiwaną.

Rozwiązanie

Zdarzenie losowe	wyrzucamy 1	wyrzucamy 2	wyrzucamy 3	wyrzucamy 4	wyrzucamy 5	wyrzucamy 6
Zmienna losowa	2	4	1	0	0	5
Prawdopodobieństwo zdarzenia	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

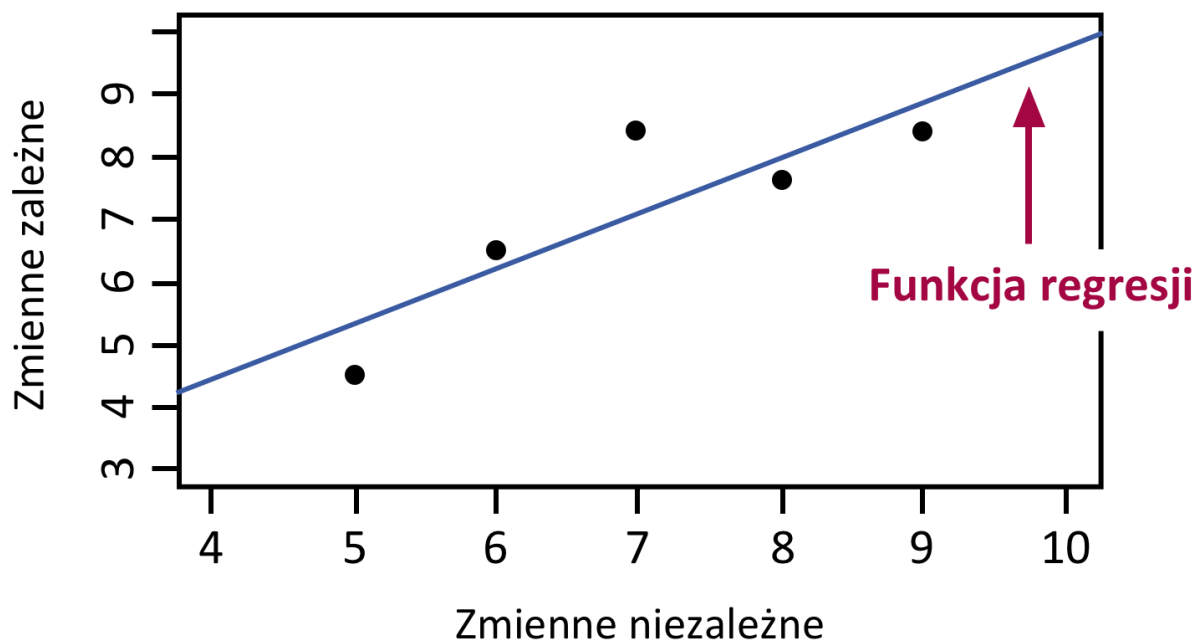
Wartość oczekiwana: $EX = 2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} = 2$.

Wartość oczekiwana mówi nam o tym, czy strategia długoterminowa jest dla nas korzystna, to znaczy, czy będziemy zyskiwać, czy tracić.

Regresja to metoda opisująca zależność między zmienną tzw. zależną a zmienną niezależną. Różne modele funkcji regresji umożliwiają obliczenie zmiennej niezależnej dla nieznanych zmiennych zależnych.

Przykład

Dla zmiennych niezależnych {5, 6, 7, 8, 9} określono wartości zmiennych zależnych jak na wykresie. Następnie zbudowano liniową funkcję regresji. Zauważmy, że dla nieznaney zmiennej niezależnej równej 10 możemy obliczyć wartość zmiennej zależnej. Jest ona równa około 9.



Punkt procentowy to jednostka różnicy między dwiema wielkościami podanymi w procentach.

Przykład

Oprocentowanie lokat wzrosło z 3% do 5%. O ile punktów procentowych wzrosło oprocentowanie?

Rozwiązanie

$$5 - 3 = 2$$

Oprocentowanie wzrosło o 2 punkty procentowe.

Ćwiczenia

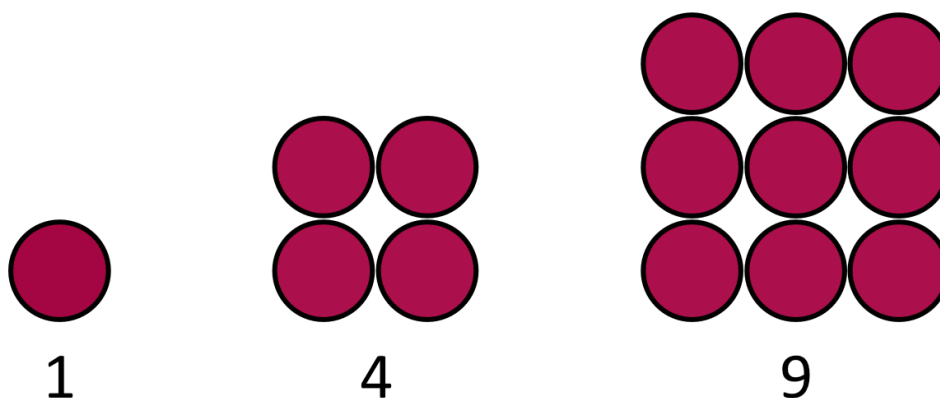
Prezentowane poniżej ćwiczenia dostosowane dla uczniów III etapu edukacyjnego rozwijają zagadnienie rekurencji. Ćwiczenia te można według potrzeb dowolnie rozwinąć i opracować na ich podstawie projekt sytuacji edukacyjnej, który został szerzej omówiony w Zeszycie 1 Zestawu 7.

Warto przy tej okazji wprowadzić uczniów w środowisko serwisu internetowego [Wolfram Alpha](#). Jest to strona internetowa stworzona przez amerykański koncern Wolfram Alpha LCC. Wykonuje ona obliczenia matematyczne, rozwiązuje równania, podaje odpowiedzi na pytania (należy je zadać w języku angielskim), przedstawia dane statystyczne itp.

Zadanie 1

Zagadnienie: Rekurencja

Jaka będzie różnica liczby kulek między 4 a 3 krokiem?

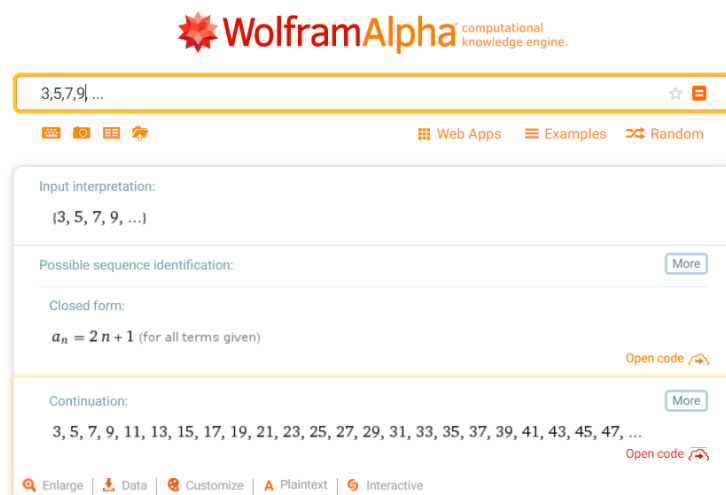


Uczniowie rysują krok czwarty i zapisują różnicę.

Pytania pomocnicze:

- Jaki będzie różnica między krokiem 6 a 5?
- Czy można podać przepis na liczbę różnicy kulek między dowolnym krokiem i krokiem go poprzedzającym?
- Czy WolframAlpha może pomóc w rozpoznaniu wzorca?

Wprowadźmy kilka różnic.



Pytanie pomocnicze:

- Czy np. dla kroku 7 system rozpoznał poprawnie wzór?

Zadanie dla ucznia zdolnego: Uzasadnij, poprawność wzoru, stosując model matematyczny.

Przewidywane rozwiązanie

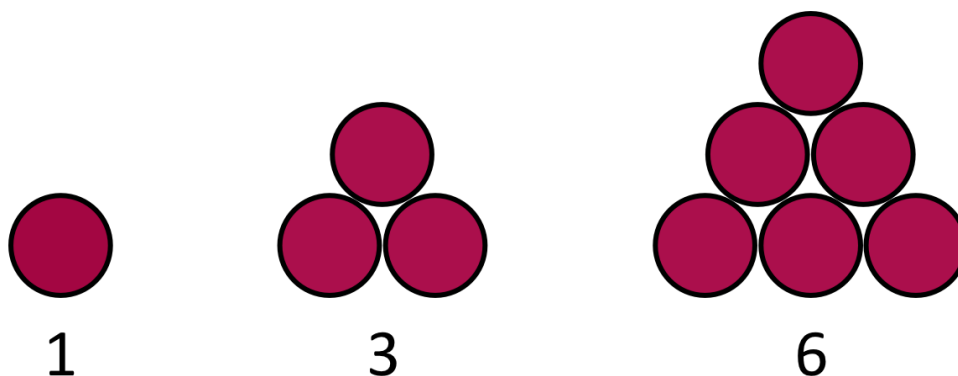
Wzór na n -ty krok liczby kulek a od n równa się n kwadrat. Wzór na różnicę a od n minus a od n minus jeden równa się n kwadrat minus n minus jeden kwadrat równa się dwa n plus jeden.

Modelowe rozwiązanie może być przedstawione wszystkim uczniom.

Zadanie 2

Zagadnienie: Rekurencja

Jaka będzie różnica liczby kulek między 4 a 3 krokiem? Rozpoznaj problem.

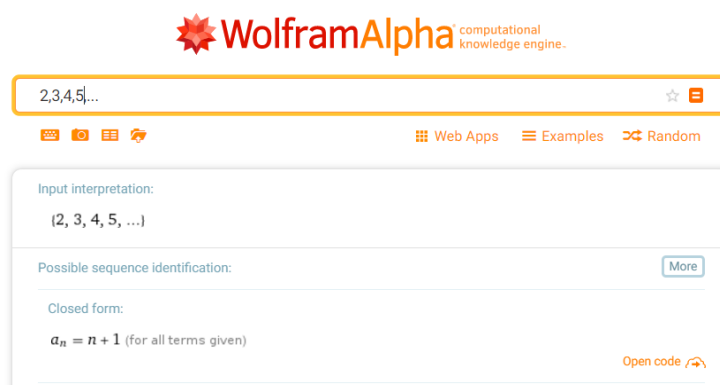


Uczniowie rysują krok czwarty i zapisują różnicę.

Pytania pomocnicze:

- Jaki będzie różnica między krokiem 6 a 5?
- Czy można podać przepis na liczbę różnicy kulek między dowolnym krokiem i krokiem go poprzedzającym?
- Czy WolframAlpha może pomóc w rozpoznaniu wzorca?

Wprowadźmy kilka różnic.



Pytanie pomocnicze:

- Czy np. dla kroku 7 system rozpoznał poprawnie wzór?

Zadanie dla ucznia zdolnego: Uzasadnij poprawność wzoru, stosując model matematyczny.

Przewidywane rozwiązanie

Wzór na n -ty krok liczby kulek a od n równa się n razy n plus jeden podzielć przez dwa
 Wzór na różnicę a od n plus jeden minus a od n równa się n plus jeden.

Modelowe rozwiązanie może być przedstawione wszystkim uczniom.

